

Proyecto Fin de Grado
Grado en Ingeniería de las Tecnologías
Industriales

Análisis dinámico de un mecanismo de fuerza
constante.

Autor: Adrián Soto González

Tutor: Daniel García Vallejo
Contutor: Javier López Martínez

**Dpto. de Ingeniería Mecánica y Fabricación
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2018



Proyecto Fin de Grado
Grado en Ingeniería de las Tecnologías Industriales

Análisis dinámico de un mecanismo de fuerza constante.

Autor:
Adrián Soto González

Tutor:
Daniel García Vallejo
Profesor titular

Contutor:
Javier López Martínez
Departamento de Ingeniería
Universidad de Almería

Dpto. de Ingeniería Mecánica y Fabricación
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla
Sevilla, 2018

Proyecto Fin de Carrera: Análisis dinámico de un mecanismo de fuerza constante.

Autor: Adrián Soto González
Tutor: Daniel García Vallejo
Contutor: Javier López Martínez

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2018

El Secretario del Tribunal

*Por mí y todos mis
compañeros, y por mi
familia, primero.*

Agradecimientos

I didn't know who I was. How could I? For the first 22 years of our lives, we are trained to listen to voices that are not our own. Parents and professors fill our heads with wisdom and information, and then employers and mentors take their place and explain how this world really works. Usually these voices of authority make sense, but sometimes doubt starts to creep into our heads and into our hearts. "That's not quite how I see the world" it is kind of easier just to nod, agree with and go along. We have to take this "Going along" until we find our character and this character will give us a dream.

Steven Spielberg said once; when you have a dream, it doesn't often come at you yelling in your face "This is who you are and this is what you must be for the rest of your life.", sometimes a dream almost whispers. The hardest thing to listen to; your instincts, your human personal intuition, always whispers, it never shouts. And if everyone is talking to you, you don't listen to the echos of your mind. So, you have to, every day of your live, be ready to hear what whispers, in your ear, very rarely shout and if you can listen to the whispers, it tickles your heart and there's something you think you want to do for the rest of your life, then, that is going to be what you do for the rest of your life and we will benefit from everything you do.

To my inner voice.

*Adrián Soto González
Grado en Ingeniería de las Tecnologías Industriales
Sevilla, 2018*

Los mecanismos de fuerza constante, desde que se comenzaron a utilizar por los relojeros en el siglo XV, siempre han sido uno de los principales objetos de estudio de este gremio. En los últimos años, con los grandes avances en los diferentes campos como la medicina, la electrónica y la fabricación, los mecanismos de fuerza constante han pasado a controlar más que el tiempo. Su uso ha sido clave desde el ensamblaje de micro piezas en componentes electrónicos, hasta operaciones quirúrgicas. Es por ello, por lo que se han convertido hoy día en una de las principales vías de investigación de la ingeniería mecánica.

Si bien, hasta el momento, para mantener una fuerza constante en un mecanismo, se han usado complejos sistemas de control que derivaban en un alto coste o en poca precisión. Es por ello, por lo que ha renacido un nuevo mundo de mecanismo de fuerza constante, volviendo a los originales mecanismos de los relojeros. Estos usan su propia estructura para que, mediante una combinación de elementos elásticos y rígidos, el sistema consiga tener un *output* o *input* de fuerza constante sin necesidad de ningún control. En este documento, se analizará dinámicamente el diseño de un mecanismo CFM basado en un perfil de leva. En su estudio se considerarán las fuerzas de rozamiento y las fuerzas de inercia, las cuales fueron despreciadas en el estudio realizado para la obtención de puntos de la leva. Así se verá la influencia que tienen estas fuerzas en el diseño final del mecanismo, convergiendo finalmente a un perfil diseñado de forma más rigurosa que en los demás estudios de la bibliografía.

Constant force mechanisms since their very first used in the fifteenth century clocks, have always been one of the main objects of study of this guild. In recent years, with the great advances in different fields such as medicine, electronics and manufacturing, the constant force mechanisms control more than time. Their use has been key from the assembly of micro pieces in electronic components, to surgical operations. That is why, today, it has become one of the main research branches of mechanical engineering.

Although, until now to maintain a constant force in a mechanism, complex control systems have been used, which established a high cost or low accuracy. That is why, a new branch of constant force mechanism has reborn. These systems use their own structure through a combination of elastic and rigid elements, to have a constant *output* or *input* force without the need of complex control systems. In this document, the design of a constant force mechanism based on a cam profile will be dynamically analyzed. In his study, rolling and inertia forces are considered. These forces, were despised in the study carried out to obtain the points of the cam, as in all the analyzes of the bibliography. This consideration, in the dynamic analysis, will show the influence of these forces on the final design of the mechanism, converging in a more rigorously design of the profile of the cam than in the other studies in the bibliography.

Agradecimientos	ix
Resumen	xi
Abstract	xiii
Índice	xv
Notación	xix
Índice de Figuras	i
1 Introducción	1
1.1 Motivación	4
1.2 Estructura	5
2 Diseño conceptual del mecanismo	7
2.1 Diseño conceptual.	7
2.2 Definición de la fuerza de entrada.	9
2.3 Integración numérica del movimiento del centro del rodillo	12
2.4 Influencia de los diferentes parámetros y consideraciones de diseño.	13
2.4.1 Influencia del coeficiente de fricción.	13
2.4.2 Influencia de la longitud de la correa.	14
2.4.3 Influencia de la rigidez.	14
2.4.4 Influencia de la consideración de la fricción.	15
3 Definición del problema	11
3.1 Simplificaciones y definición del sistema	11
3.1.1 Simplificaciones del sistema	12
3.1.2 Sólidos del sistema	14
4 Cinemática del sistema	18
4.1 Selección de coordenadas	18
4.2 Matrices de transformación	21
4.3 Coordenadas de referencia del sistema	22
4.4 Parámetros del sistema	24
4.4.1 Sólido Segundo	25
4.4.2 Sólido tercero	27
4.4.3 Sólido Cuarto	28
4.4.4 Elemento elástico	29
4.4.5 Sólido primero	31
4.5 Vinculos entre sólidos	33
4.6 Restricciones	33
4.6.1 Restricciones de par de rotación	34
4.6.2 Restricciones de par prismático	36
4.6.3 Restricciones de par de leva	37
4.6.4 Contacto perpendicular	39
4.6.5 Rodadura sin deslizamiento	39

4.6.6	Vector de restricciones	40
4.7	<i>Grados de libertad del mecanismo</i>	41
4.8	<i>Restricciones de movilidad</i>	41
4.9	<i>Derivadas de las ecuaciones de restricción respecto al tiempo</i>	42
4.10	<i>Planteamiento alternativo del sistema</i>	43
4.10.1	Coordenadas y restricciones alternativas	44
5	Dinámica del sistema	47
5.1	<i>Ecuación diferencial-algebraica de equilibrio del sistema.</i>	47
5.2	<i>Fuerzas aplicadas</i>	49
5.2.1	Fuerzas elástica	49
5.2.2	Fuerzas gravitatorias	50
5.2.3	Fuerzas cuadrática en velocidad	50
5.2.4	Fuerza de rodadura	51
5.3	<i>Arreglo ecuación diferencial-algebraica de equilibrio del sistema</i>	53
5.4	<i>Coordenadas y sus derivadas respecto al tiempo.</i>	53
5.4.1	Estabilización de Baumgarte	54
5.4.2	Problema de velocidad	55
5.4.3	Problema de aceleraciones	55
6	Resolución numérica	57
6.1	<i>Definición del mecanismo</i>	57
6.1.1	Coordenadas simbólicas	57
6.1.2	Interpolación de la superficie de la leva	58
6.1.3	Pares cinemáticos	59
6.1.4	Jacobianos	61
6.1.5	Generación de funciones	61
6.2	<i>Simulación dinámica</i>	61
6.2.1	Parámetros del Sistema	61
6.2.2	Posición inicial	62
6.2.3	Integración de la posición	63
6.2.4	Velocidad, aceleración y fuerzas.	63
7	Resultados	67
7.1	<i>Posición inicial</i>	67
7.2	<i>Trayectorias</i>	68
7.2.1	Valores que se mantienen nulos	69
7.2.2	Movimientos en X	69
7.2.3	Movimientos en Y	70
7.2.4	Giros	71
7.3	<i>Velocidades</i>	72
7.3.1	Valores que se mantienen nulos	72
7.3.2	Velocidades en X	73
7.3.3	Velocidades en Y	74
7.3.4	Velocidades angulares	74
7.4	<i>Aceleraciones</i>	75
7.4.1	Valores que se mantienen nulos	75
7.4.2	Aceleraciones en X	76
7.4.3	Aceleraciones en Y	77
7.4.4	Aceleraciones angulares	77
7.5	<i>Fuerzas</i>	78
8	Conclusiones	81
8.1	<i>Conclusiones</i>	81

8.2	<i>Ampliación del estudio</i>	83
8.2.1	Mecanismo A	84
8.2.2	Mecanismo C	85
9	Referencias	87

$< O, X, Y >$	Sistema de referencia global
$< o^i, x^i, y^i >$	Sistema de referencia local
$1_{2 \times 2}$	Matriz identidad
\vec{a}_P^i	Aceleración del punto P del <i>Sólido</i> i
\vec{a}_G^i	Aceleración del centro de gravedad del <i>Sólido</i> i
A^i	Matriz de giro del <i>Sólido</i> i
B	Termino constante
$B(q)$	Matriz jacobiana de las restricciones no holónomas respecto al vector de velocidades generalizadas y no generalizadas
$B_d(q)$	Matriz jacobiana de las restricciones no holónomas respecto al vector de velocidades generalizadas y no generalizadas dependientes
$B_a(q)$	Matriz jacobiana de las restricciones no holónomas respecto al vector de velocidades generalizadas y no generalizadas independientes
b	Vector en sistema de referencia global
\bar{b}	Vector en sistema de referencia local
C	Vector de restricciones
C^{R1}	Vector de restricciones introducidas por el par de rotación primero
C^{R2}	Vector de restricciones introducidas por el par de rotación segundo
C^{P1}	Vector de restricciones introducidas por el par prismático
C^{L1}	Vector de restricciones introducidas por el par de leva
C_q	Matriz jacobiana del vector de restricciones C respecto de q
C_{qd}	Matriz jacobiana del vector de restricciones C respecto de q^{dep}
C_{qi}	Matriz jacobiana del vector de restricciones C respecto de q^{ind}
C^{NH}	Vector de restricciones no holónomas
C^{mov}	Vector de restricciones de movilidad
C_t	Derivada del vector C respecto al tiempo
C_{tt}	Derivada del vector C_t respecto al tiempo
D	Matriz formada por el jacobiano
F_μ	Fuerza del actuador
F_t	Fuerza de tensión
F_k	Fuerza elástica
h	Paso de integración
H_i	Matriz jacobiana de r_i respecto a q

h_i	Matriz jacobiana de v_i respecto a q
I_{Gi}	Tensor de inercia del <i>Sólido i</i> respecto a su centro de gravedad
k	Rigidez del elemento elástico
l_t	Longitud del tirante
M	Matriz de masas
m_i	Masa del <i>Sólido i</i>
m	Pendiente de la recta tangente al perfil de la leva en el punto C
N	Fuerza normal
$p_{i,j}^B$	Parámetros usados para definir el par cinemático B entre los <i>Sólidos i y j</i>
Q	Fuerzas generalizadas
Q_v	Fuerzas generalizadas cuadráticas en velocidad
Q_{muelle}	Fuerza generalizada elástica
Q_{grav}	Fuerza generalizada gravitatoria
q	Vector de coordenadas generalizadas y no generalizadas
q^{dep}	Vector de coordenadas generalizadas y no generalizadas dependientes
q^{ind}	Vector de coordenadas generalizadas y no generalizadas independientes
\dot{q}	Vector de velocidades generalizadas y no generalizadas
\dot{q}^{dep}	Vector de velocidades generalizadas y no generalizadas dependientes
\dot{q}^{ind}	Vector de velocidades generalizadas y no generalizadas independientes
\ddot{q}	Vector de aceleraciones generalizadas y no generalizadas
\ddot{q}^{dep}	Vector de aceleraciones generalizadas y no generalizadas dependientes
\ddot{q}^{ind}	Vector de aceleraciones generalizadas y no generalizadas independientes
r_i^P	Vector de posición respecto al sistema de referencia global del punto P relativo al <i>Sólido i</i>
t	Tiempo
$\vec{t}(y)$	Vector tangente al perfil de la leva en el punto C
U^{def}	Energía de deformación
\bar{u}_i^P	Vector de posición del punto P perteneciente al <i>Sólido i</i> en sus ejes de referencia
v	Vector de velocidades generalizadas y no generalizadas
\vec{v}_P^i	Velocidad del punto P del <i>Sólido i</i>
$x(y)$	Coordenada que marca la posición del punto de contacto C dependiente de la coordenada no generalizada y
x_0	Elongación inicial del muelle
x_1	Coordenada generalizada que sitúa el sistema de referencia local del <i>Sólido 1</i> en el eje horizontal
x_2	Coordenada generalizada que sitúa el sistema de referencia local del <i>Sólido 2</i> en el eje horizontal
x_3	Coordenada generalizada que sitúa el sistema de referencia local del

	<i>Sólido 3</i> en el eje horizontal
x_4	Coordenada generalizada que sitúa el sistema de referencia local del <i>Sólido 4</i> en el eje horizontal
y_1	Coordenada generalizada que sitúa el sistema de referencia local del <i>Sólido 1</i> en el eje vertical
y_2	Coordenada generalizada que sitúa el sistema de referencia local del <i>Sólido 2</i> en el eje vertical
y_3	Coordenada generalizada que sitúa el sistema de referencia local del <i>Sólido 3</i> en el eje vertical
y_4	Coordenada generalizada que sitúa el sistema de referencia local del <i>Sólido 4</i> en el eje vertical
y	Coordenada no generalizada que marca el punto de contacto C
α	Ángulo formado entre la vertical y el tirante de longitud l_t
β	Ángulo formado entre la vertical y la recta tangente al perfil de la leva en el punto C
Δx	Incremento de la coordenada x
ϵ	Coefficiente de estabilización de Abangarte
μ_r	Coefficiente de fricción entre la superficie de la leva y el <i>Sólido 2</i>
μ_R	Coefficiente de rodadura entre la superficie de la leva y el <i>Sólido 2</i>
λ	Vector de multiplicadores de LaGrange
ϕ_2	Coordenada no generalizada que marca el punto de contacto C
θ_1	Coordenada generalizada que marca el giro del <i>Sólido 1</i> respecto al sistema de referencia global
θ_2	Coordenada generalizada que marca el giro del <i>Sólido 2</i> respecto al sistema de referencia global
θ_3	Coordenada generalizada que marca el giro del <i>Sólido 3</i> respecto al sistema de referencia global
θ_4	Coordenada generalizada que marca el giro del <i>Sólido 4</i> respecto al sistema de referencia global
$\vec{\omega}^2$	Velocidad angular del <i>Sólido 2</i>
ω	Velocidad angular del actuador

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1-1 Cinta metálica firmemente enrollada que proporciona fuerza al resto del mecanismo.	1
Figura 1-2 Mecanismo Stackfreed.	2
Figura 1-3 Girard-Perregaux Constant Escapement, con la hoja de silico extrafino.	2
Figura 2-1 Mecanismo de leva a estudiar diseñado mediante la herramienta SolidWorks.	8
Figura 2-2 Diseño conceptual representado esquemáticamente.	9
Figura 2-3 Todas las fuerzas influyentes del sistema en equilibrio.	10
Figura 2-4 Trayectoria del centro del rodillo y perfil de la leva, además, definición del ángulo β .	11
Figura 2-5 Trayectoria del centro del rodillo en función de varios valores de μr y distintas direcciones.	13
Figura 2-6 Trayectoria del centro del rodillo en función de varios valores de k y distintas direcciones.	14
Figura 2-7 Ratio F/F' en función de los diferentes valores que pueden ir tomando lt	15
Figura 3-1 Mecanismo de leva a estudiar diseñado mediante la herramienta SolidWorks.	11
Figura 3-2 Planos de simetría del mecanismo. A la derecha (z-x) y a la izquierda (z-y).	12
Figura 3-3 Mecanismo considerado como plano por la simetría (z-y).	13
Figura 3-4 Mecanismo plano simplificado por la simetría (x-z).	13
Figura 3-5 Sólidos y elemento elástico que componen el sistema. De izquierda a derecha y desde arriba; sólido 1, sólido 2, sólido 3 y 4, y elemento elástico	15
Figura 3-6 Sólidos y elemento elástico conformando el mecanismo esquemáticamente.	16
Figura 3-7 Aplicación rigurosa de la simetría.	16
Figura 3-8 Esquema y simplificación final del sistema que se lleva a estudio.	17
Figura 4-1 Sistema con coordenadas globales y de referencia de cada sólido.	19
Figura 4-2 Sistema con coordenadas generalizadas globales y de referencia de cada sólido. Además, las coordenadas no generalizadas.	20
Figura 4-3 Sistema con coordenadas globales y de referencia de cada sólido.	21
Figura 4-4 Coordenadas de referencia para un punto P del <i>Sólido i</i> .	22
Figura 4-5 <i>Sólido 2</i> y sus puntos de interés y coordenadas de referencia.	25
Figura 4-6 Vectores de posición de los puntos importantes del <i>Sólido 2</i> .	26
Figura 4-7 Puntos de interés y coordenadas de referencia del <i>Sólido 3</i> .	28
Figura 4-8 <i>Sólido 4</i> y sus puntos de interés y coordenadas de referencia.	29
Figura 4-9 Elemento elástico del mecanismo.	30
Figura 4-10 <i>Sólido 1</i> .	31
Figura 4-11 Perfil de leva obtenido a partir de los parámetros antes presentados.	32
Figura 4-12 <i>Sólido 1</i> y sus puntos de interés y coordenadas de referencia.	33
Figura 4-13 Representación de todos los pares y coordenadas de referencia.	34
Figura 4-14 Pares de rotación con todos sus coordenadas y parámetros involucrados.	35
Figura 4-15 Par prismático con todos sus coordenadas y parámetros involucrados.	36
Figura 4-16 Par de leva con todos sus coordenadas y parámetros involucrados.	38

Figura 4-17 Trayectoria del <i>Sólido 4</i> , introducida por el actuador.	42
Figura 4-18 Planteamiento alternativo del sistema.	44
Figura 5-1 Par prismático con todos sus coordenadas y parámetros involucrados.	49
Figura 5-2 Descomposición de fuerzas en <i>Sólido 2</i> .	52
Figura 6-1 Interpolación de la superficie de la leva.	58
Figura 6-2 Precisión de la interpolación de la superficie de la leva.	59
Figura 7-1 Posición inicial de todos los sólidos.	68
Figura 7-2 Recorrido del centro del <i>Sólido 2</i> .	68
Figura 7-3 Coordenadas que deben ser nulas.	69
Figura 7-4 Desplazamientos que realizan la coordenada x de los <i>Sólidos 2</i> y <i>3</i> .	70
Figura 7-5 Desplazamiento que realizan las coordenadas y .	70
Figura 7-6 Giro de la coordenada θ_3 .	71
Figura 7-7 Definición de las coordenadas ϕ_2 y θ_2 .	71
Figura 7-8 Giro de la coordenada θ_2 y ϕ_2 .	72
Figura 7-10 Velocidades que deberían dar valor nulo.	73
Figura 7-11 Velocidades en <i>eje x</i> .	73
Figura 7-12 Velocidades en el <i>eje y</i> .	74
Figura 7-13 Velocidades angulares.	75
Figura 7-14 Aceleración que deben dar valor nulo.	76
Figura 7-15 Aceleraciones en <i>eje x</i> .	76
Figura 7-16 Aceleraciones en <i>eje y</i> .	77
Figura 7-17 Aceleraciones angulares.	78
Figura 7-18 Fuerzas obtenidas.	78
Figura 7-19 Descomposición de fuerzas en <i>Sólido 2</i> .	79
Figura 7-20 Forma de la fuerza del actuador.	80
Figura 8-1 Fuerza actuador con incremento de masas y velocidad.	82
Figura 8-1 Fuerza actuador con incremento de masas.	82
Figura 8-2 Fuerza actuador con diferentes rigideces.	83
Figura 8-3 Mecanismos presentados en (Javier López-Martínez, 2017).	84
Figura 8-4 Esquema del mecanismo A.	84
Figura 8-5 Esquema del mecanismo C.	86

- Platón -

Figura 1-1 Cinta metálica firmemente enrollada que proporciona fuerza al resto del mecanismo.

Una evolución del reloj con barril, lleva al mecanismo denominado *Stackfreed*, que se acerca un poco más a la deseada fuerza constante. Este mecanismo era usado en relojes del siglo XVII y aún hoy día se pueden encontrar en relojes modernos. Consistía en un elemento deformado que aplicaba presión en el barril para igualar la fuerza en todo momento.

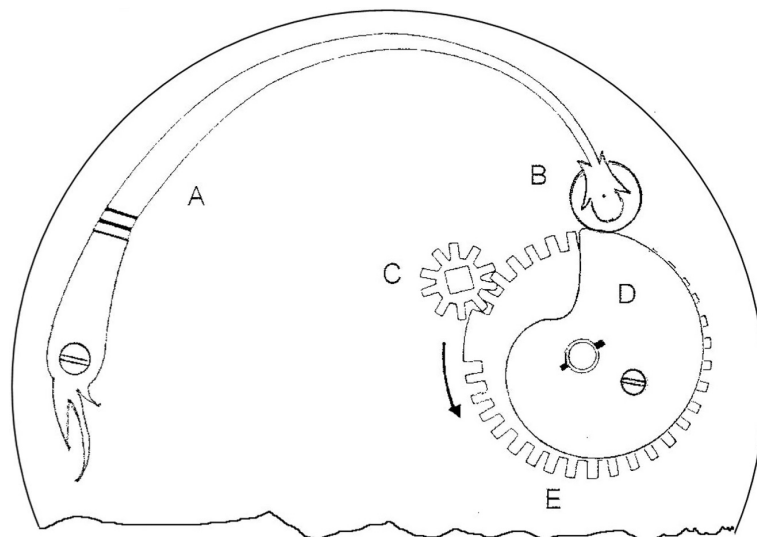


Figura 1-2 Mecanismo Stackfreed.

Otro mecanismo que intentaba solventar estas irregularidades de fuerza y de muy frecuente uso en la historia de la relojería es el *Stopwork*, que limitaba la cantidad de enrollado y desenrollado al que podía ser sometido el muelle principal, igualando eficazmente la curva de par.

Si bien, ni el mecanismo *Stopwork*, ni *Stackfreed* llegaban a conseguir una fuerza precisamente constante. Esto llevaba al mecanismo de *Girard-Perregaux Constant Escapement L.M.* Este consiste en una hoja de silicio extrafino que se doblaba cuando recibía los impulsos, entregando así la misma cantidad de potencia. Girard-Perregaux fue el primer relojero en conseguir implementar un mecanismo de fuerza constante en un reloj de pulsera.



Figura 1-3 Girard-Perregaux Constant Escapement, con la hoja de silicio extrafino.

En la actualidad, por sus novedosas e importantes aplicaciones en numerosos campos, los mecanismos de fuerza constante, se han convertido en una de las ramas de investigación más importantes.

Hasta los últimos años, el control de fuerza se había llevado a cabo mediante sistemas de control compuestos por sensores y ordenador. Para controlar la fuerza con la que se trabajaba, los sensores se colocaban entre la herramienta en cuestión y la superficie de contacto, formando con el sistema de control un bucle cerrado para la realimentación de datos (Xu, 2014) y (Erlbacher, 1995). Siguiendo este montaje y para tener un control preciso y a la vez ágil, se desarrollaron numerosos algoritmos a cuál, computacionalmente, más complejo (Jung, 2004) y (V Mallapragada, 2006). La potencia de estos algoritmos se encontraba en su capacidad para proporcionar una alta precisión tanto en posición como en fuerza (C. Liang, 2017). A pesar de ello se tenían grandes desventajas. Dado que la mayor parte de los sensores debían ir montados en la parte final de la muñeca del robot o de la herramienta, estos debían ser extremadamente pequeños, lo que llevaba a una fabricación complicada y a requerir un alto rendimiento de sus componentes electrónicos, por su difícil mantenimiento, lo que acaba derivando en un alto coste (Y. Huang, 2012). Por otro lado, si se pretendía controlar la fuerza además de la posición se requería un potente algoritmo. Aunque hoy día esto se está solucionando usando dos controladores independientes, uno para posición y otro para fuerza (G. Wang, 2016) y (A. Jafari, 2016), se llega a simplificar el algoritmo, pero reduce la precisión (H.T Pham, 2011).

Bajo todas estas circunstancias, en los últimos años se han desarrollado un tipo de mecanismos de fuerza constante, denominados CFM, por sus iniciales en inglés (*Constant Force Mechanisms*) que pueden mantener fuerza constante solo por su complejidad estructural.

Los CFM han ganado un rápido desarrollo en las últimas décadas (C.Z Ma, 2014) gracias a la manipulación de precisión y han sido ampliamente usados en varios dominios como robótica, ensamblaje automático, dispositivos médicos (Weight, 2002) y en los más novedosos sistemas electrónicos.

Uno de los usos de medicina más destacado es el campo de la oftalmología. En una cirugía donde el control de fuerza se requiere paso a paso para mantener la seguridad de la operación o también en otro campo de la medicina, en la inyección de células embrionarias (H. Huang, 2011). En un campo completamente diferente, en el ensamblaje de materiales cada vez más pequeños y frágiles que se pueden llegar a romper con rangos de fuerzas de (μN) (Y. Wei, 2015), en piezas para los nuevos productos electrónicos. Y por último en la robótica, en el reto de conseguir una regulación de fuerza cuando se interactúa en ambientes desconocidos es uno de los principales objetivos. Por otro lado, los CFM además pueden asistir a los sensores actualmente usados. Estos reducirían los complejos algoritmos usados para dirigir al sistema de control (D. Bossert, 1996) haciendo así disminuir el coste del sistema, aumentando por otro lado su efectividad, precisión y facilidad de control por parte del usuario.

Todos estos avances son hoy día posibles gracias a los agigantados pasos dados por los diferentes investigadores desde finales del siglo pasado (Weight, 2002). En la actualidad, las principales investigaciones que se están llevando a cabo centran sus esfuerzos en hacer los CFM igual de efectivos y económicos con sistemas neumáticos, eléctricos e hidráulicos, aunque hasta el momento lo que funciona y predomina son aquellos construidos con elementos deformables y elásticos, para disminuir su complejidad.

Así, según la constitución de la gran mayoría de los CFM, estos se agrupan en dos grandes grupos.

El primero de ellos viene constituido por el más simple, pero a la vez más común de ellos. Engloba a los mecanismos formados por elementos rígidos y elásticos lineales, como muelles. Los primeros pasos en el mundo de los CFM se dieron desarrollando los muelles de tensión constante o “Negator Spring” (Wall, 1963) que consisten en una espiral de muelle plano usados en numerosos dispositivos (Williman, 1995). En este grupo se suelen encontrar patentes que consisten en un muelle lineal, articulado a un extremo, mientras que el otro extremo es obligado a seguir el perfil no lineal de una leva, unido a su vez a un rodillo que gira para disminuir o evitar la fricción. Este perfil está diseñado para que, junto al muelle, se consiga una fuerza constante, aunque en algunas aplicaciones como la robótica se persiga además un torque no lineal.

Por un lado, en el segundo grupo, se tiene a los denominados “*compliant force mechanisms*” o de deformación, que aprovechan el pandeo o deformación de algún elemento deformable como vigas, arcos y elementos de rigideces negativas y positivas descritos en (Weight, 2002) donde la biestabilidad viene dada por el pandeo de algún elemento curvado.

Las ventajas de este grupo es que un único elemento es el que contiene toda la energía y esta no necesita ir pasando de un elemento a otro. Otra ventaja de estos mecanismos es la escasa cantidad de piezas que necesita, reduciendo así su complejidad de ensamblaje y mantenimiento, lo que los hace bastante atractivos aun no estando a la altura de los CFM rígidos. En este campo destacan mecanismos como el diseñado por (Ü Sönmez, 2008). Dentro de este grupo los mecanismos se pueden agrupar de muy diferentes formas, como se hace en (P. Alabuzbey, 1989), que atendiendo a las diferentes rigideces se clasifican a su vez en 4 diferentes grupos.

1.1 Motivación

El mecanismo de fuerza constante que se va a analizar en este documento pertenece al primer grupo de los descritos en el apartado anterior. Concretamente, a aquellos constituidos por un par de leva. En todo este tipo de mecanismos el perfil de leva se obtiene, en la mayoría de los casos, a partir de un análisis cuasiestático de las fuerzas que en este se ven involucradas, lo que no es más que despreciar las fuerzas de inercia. En cierto modo, esta consideración es oportuna, ya que las masas de los sólidos de los sistemas no serán de relevancia y las aceleraciones a las que estos serán sometidos tampoco son importantes relativamente. Por otro lado, también se suelen despreciar las fuerzas de rozamiento.

Así, este proyecto parte de los resultados obtenidos en que, aun considerando las fuerzas de rozamiento en el estudio del perfil de leva del mecanismo, sí que el análisis sigue siendo cuasiestático, no considerando las fuerzas de inercia.

Tal y como se puede ver en el artículo (Javier López-Martínez, 2017) las fuerzas de rozamiento juegan un papel importante a la hora de determinar el perfil de la leva, llegando a veces a determinar un perfil completamente diferente si no se tienen en cuenta. Es por ello, por lo que en este proyecto se pretende hacer el estudio dinámico, considerando las fuerzas de inercia. Se determinará la influencia que tienen las masas de cada uno de los sólidos, así como el papel que juegan cada uno de los parámetros del mecanismo en la fuerza de salida del sistema.

1.2 Estructura

Después de haber sentado las bases y los antecedentes de los mecanismos de fuerza constante, se adentran los siguientes capítulos en una descripción más detallada de cada uno de los aspectos de interés y necesarios para terminar determinando el comportamiento dinámico del mecanismo y como cada uno de los parámetros influyen en el diseño de este.

En el *Capítulo 2* se presentará el mecanismo diseñado (Javier López-Martínez, 2017) para llevar a cabo el estudio dinámico. De este mecanismo elegido se hará una descripción detallada, determinando la relación de la fuerza de salida con todos los parámetros de diseño, así como el papel que cada uno de ellos juega a la hora de definir el perfil de la leva del mecanismo de fuerza constante.

Centrando ya toda la atención en el mecanismo elegido, en el *Capítulo 3* se hará una simplificación de este, aprovechando los diferentes ejes de simetría por los que está formado, dejando así un sistema más simple de estudio sin perder información. Seguidamente se definirán los sólidos que conforman el mecanismo y las coordenadas que se usarán para su estudio. Se describirán los pares cinemáticos que forman entre ellos y las ecuaciones que modelan estas restricciones que deben cumplir las coordenadas. Todo ello de forma muy sistemática. Al final de este capítulo se definen los grados de libertad del mecanismo y un planteamiento alternativo de las ecuaciones de restricción de este.

Pasando al *Capítulo 4* se usarán todas las ecuaciones definidas en el *Capítulo 3* para llegar a las ecuaciones que modelan el comportamiento dinámico del mecanismo. Para ello se partirá de las ecuaciones de D'Alembert, para obtener las ecuaciones de Newton-Euler. A partir de ellas y unas magnitudes que se introducirán denominadas Multiplicadores de LaGrange, se llegará a las ecuaciones diferenciales de primer orden que orquestrarán el movimiento del mecanismo. Al final de este capítulo se hará una leve modificación de estas ecuaciones para asegurar su convergencia a la hora de buscar su solución.

El *Capítulo 5* presentará el programa creado en la herramienta de programación *Matlab* para obtener la solución de las ecuaciones presentadas en los capítulos anteriores, haciendo así la simulación dinámica del mecanismo.

Una vez obtenidos los valores de todas las variables del problema cinemático y dinámico se procederán a estudiar los resultados obtenidos en el *Capítulo 6*.

Finalmente, en el Capítulo 7 y 8 se comentarán una serie de conclusiones y potenciales estudios de mecanismos similares mediante las mismas herramientas usadas en este documento.

2 DISEÑO CONCEPTUAL DEL MECANISMO

*Invention is a process; you don't get there
overnight.
-Louis Foreman-*

En este capítulo se hace una descripción detallada del diseño conceptual presentado y definido (Javier López-Martínez, 2017) a partir del cual se lleva a cabo el análisis dinámico del sistema multicuerpo. Además, se desarrolla el estudio cuasiestático que se ha seguido (Javier López-Martínez, 2017) para obtener el perfil de la leva y el papel que juega cada uno de los parámetros presentes en el diseño, para así considerarlos en el análisis dinámico al que se quiere llegar en los siguientes capítulos.

2.1 Diseño conceptual.

El mecanismo elegido para llevar a cabo el análisis cinemático y dinámico es uno de los diseños presentados en (Javier López-Martínez, 2017). Entre ellos, es en el que podría resultar más fácil su estudio, así se pretende despejar el camino, para facilitar el mismo análisis con los demás mecanismos presentados en el mismo documento.



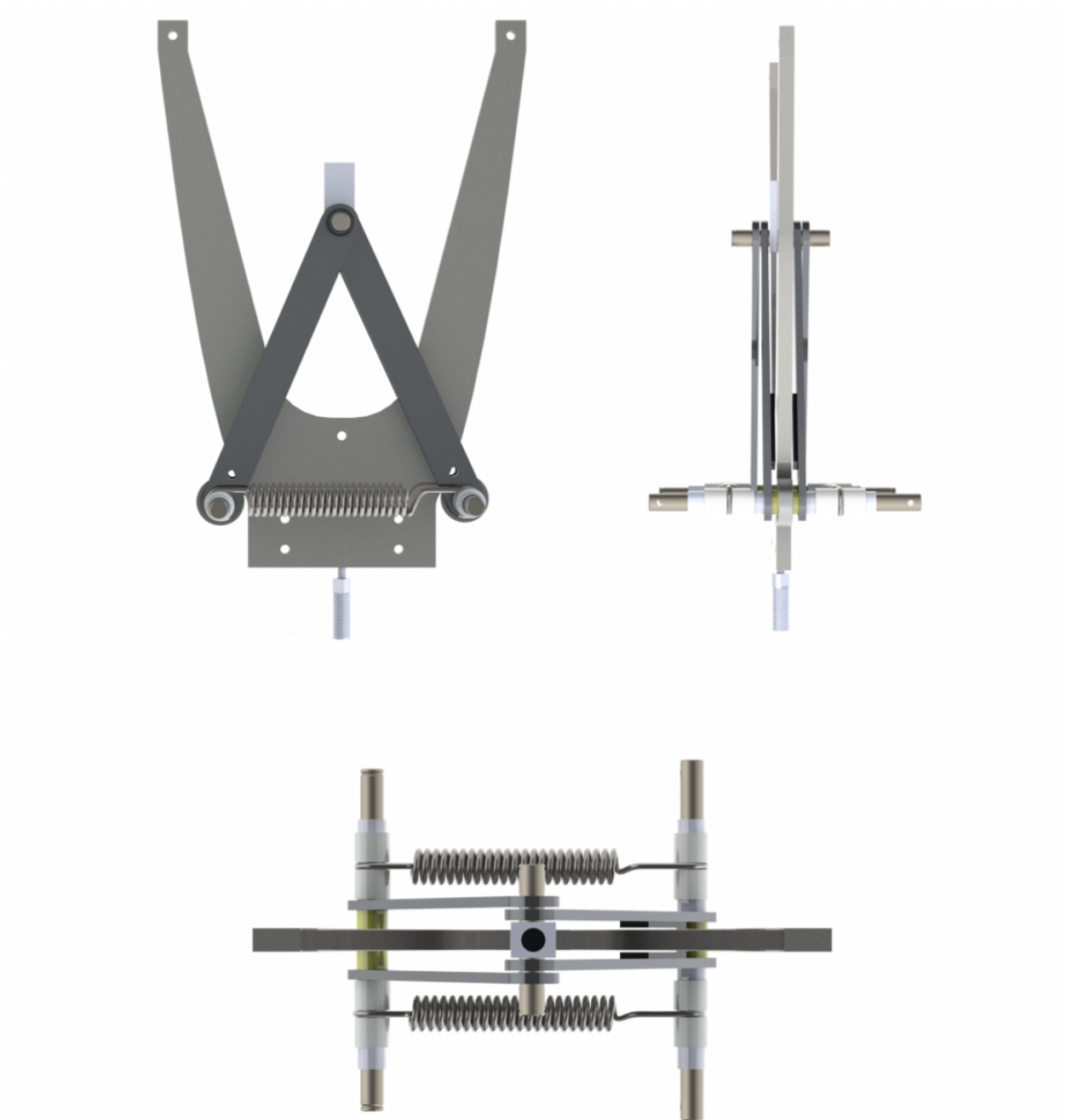


Figura 2-1 Mecanismo de leva a estudiar diseñado mediante la herramienta SolidWorks.

Esquemáticamente y para la mejor comprensión de las representaciones de los siguientes capítulos, el diseño anterior queda como en la siguiente imagen.

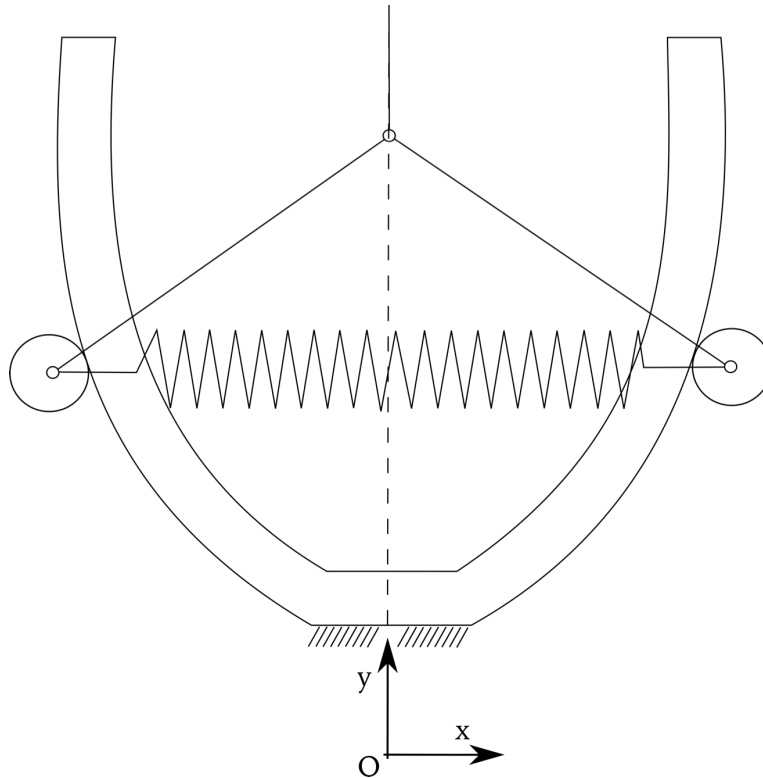


Figura 2-2 Diseño conceptual representado esquemáticamente.

Observando el mecanismo; se observa que está constituido por una leva que es simétrica respecto al eje vertical. Por el perfil de cada una de las ramas rodarán simétricamente y sin deslizar los rodillos. Estos están unidos mediante un muelle, que se deforma y traslada verticalmente cuando los rodillos recorren el perfil de la leva. El movimiento se transfiere a los rodillos mediante unos tirantes que por un lado están articulados al centro de los rodillos y por otro se unen a la pieza que sirve de articulación con la correa que acciona el mecanismo.

Como bien se ha explicado, este mecanismo es impulsado mediante una fuerza de entrada de *pull*, y no de *push*, que podría ser la entrada interesante en ciertas ocasiones. Es por ello por lo que se considera que un movimiento de *push* se puede conseguir fácilmente cambiando levemente el diseño.

2.2 Definición de la fuerza de entrada.

Para diseñar un mecanismo de fuerza constante parece obvio que por donde se debe empezar es determinando que parámetros de diseño influyen en esta fuerza y de qué forma. A continuación, se presenta el equilibrio cuasiestático para determinar el perfil de la leva, en función de todos los parámetros de diseño del mecanismo.

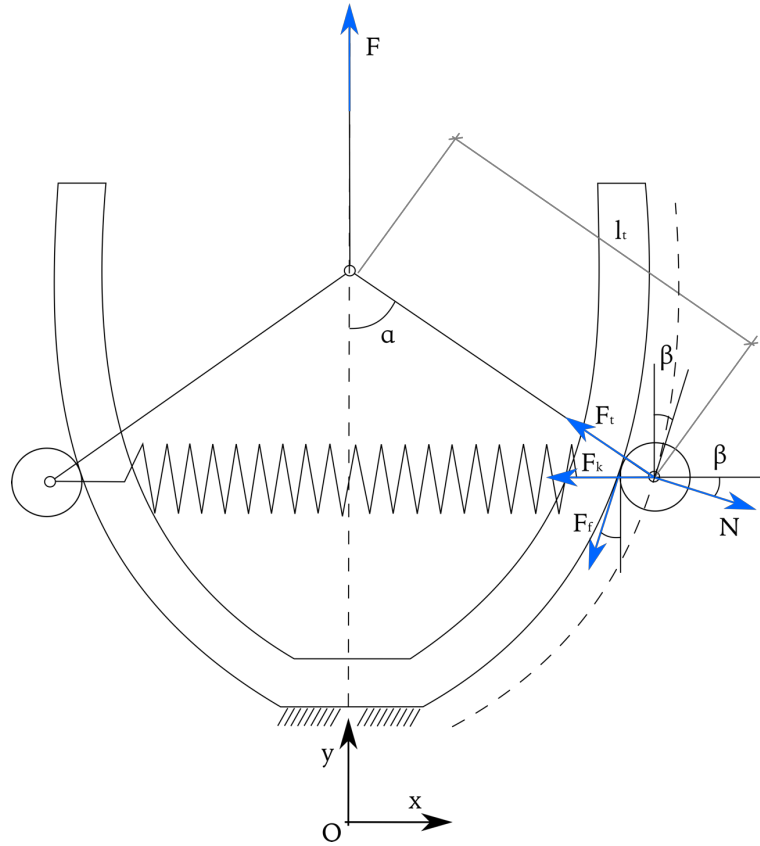


Figura 2-3 Todas las fuerzas influyentes del sistema en equilibrio.

En la imagen superior se muestran todas y cada una de las fuerzas en equilibrio cuasiestático que influirán en el diseño del perfil del sistema y muchas de las relaciones que serán de interés en los siguientes capítulos. Como se puede apreciar, se tienen en cuenta todas las fuerzas existentes, incluso las de rozamiento, pero se desprecian las fuerzas de inercia.

Centrando la atención en las demás fuerzas que aparecen en el equilibrio planteado, se puede observar el vector N que representa la fuerza de reacción entre el rodillo y la superficie de leva. Entre estos dos sólidos se tiene también la fuerza de fricción F_f , que se define como el producto entre el coeficiente de fricción y la fuerza normal de contacto, quedando como:

$$F_f = \mu_r N \quad 2-1$$

Esta expresión representa la fricción de rodadura, ya que se asume que el rodillo rueda sin deslizamiento. Por otro lado, del resultado de la unión del rodillo con el muelle, está F_k que es la fuerza que genera el muelle al deformarse, cuya expresión es:

$$F_k = 2k\Delta_x \quad 2-2$$

Donde K es la rigidez del muelle y $2\Delta_x$ es la elongación del muelle, la diferencia entre la longitud actual, $2x$, y la inicial, $2x_0$.

De igual forma, de la unión del rodillo con la correa, aparece F_t , que representa la tensión a la que está sometida la correa debido a la fuerza que introduce el usuario, F . Si se considera el ángulo α que se forma entre la correa y el eje y , la relación entre F y F_t queda como:

$$F = 2F_t \cos \alpha \quad 2-3$$

Así, recopilando todas y cada una de las fuerzas descritas se lleva a cabo el equilibrio en el eje horizontal y vertical, quedan las expresiones que siguen.

$$F_k + F_t \sin \alpha + F_f \sin \beta = N \cos \beta \quad 2-4$$

$$N \sin \beta + F_f \cos \beta = F_t \cos \alpha \quad 2-5$$

Donde β se define como el ángulo entre la tangente a la curva imaginaria que describe el centro del rodillo y el eje vertical. Así la pendiente de la curva, importante en los siguientes capítulos, queda como:

$$\tan \beta = \frac{\partial x}{\partial y} \quad 2-6$$

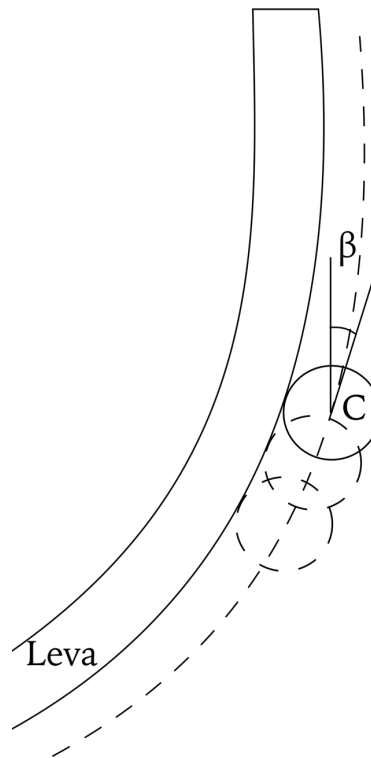


Figura 2-4 Trayectoria del centro del rodillo y perfil de la leva, además, definición del ángulo β .

Realizando las operaciones pertinentes, con el desglose anteriormente hecho, se llega a la expresión de la fuerza de entrada que depende de la rigidez del muelle, su elongación, el coeficiente de fricción y la pendiente en cada punto de la curva, de la siguiente forma:

$$F = 4k \left(\Delta x \left(\frac{1 - \mu_r \tan \beta}{\tan \beta + \mu_r} - \tan \alpha \right)^{-1} \right) \quad 2-7$$

Así para una determinada rigidez y fuerza constante y conocida, según la ecuación (2-7), el termino entre paréntesis debe permanecer constante, permitiendo así obtener un perfil a partir de esta expresión.

$$B = \Delta x \left(\frac{1 - \mu_r \tan \beta}{\tan \beta + \mu_r} - \tan \alpha \right)^{-1} \equiv \text{constante} \quad 2-8$$

E ignorando la fricción, tal y como se hace en numerosos diseños que se han presentado en la bibliografía:

$$F' = 4k\Delta x \left(\frac{1}{\tan \beta} - \tan \alpha \right)^{-1} \quad 2-9$$

$$B' = \Delta x \left(\frac{1}{\tan \beta} - \tan \alpha \right)^{-1} \equiv \text{constante} \quad 2-10$$

2.3 Integración numérica del movimiento del centro del rodillo

Una vez se tiene la definición de la fuerza en función de todos los parámetros involucrados en el diseño del mecanismo se puede pasar a obtener las trayectorias de cada uno de los rodillos. A partir de la trayectoria de estos, teniendo en cuenta su radio, se define el perfil de la leva fácilmente, como se puede intuir en la imagen del apartado anterior. Primeramente, se prepara la ecuación de arriba y se deja como:

$$\Delta x = B \left(\frac{1 - \mu_r \frac{dx}{dy}}{\frac{dx}{dy} + \mu_r} - \tan \alpha \right) \quad 2-11$$

Donde se ha incluido $\frac{dx}{dy}$ en sustitución a $\tan \beta$. Por otro lado, desarrollando $\tan \alpha$ en términos de x se tiene:

$$\tan \alpha = \frac{x}{l_t} \left(1 - \left(\frac{x}{l_t} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad 2-12$$

Con todo esto, se llega a una ecuación diferencial de primer orden no lineal,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1 - \mu_r f(x)}{\mu_r + f(x)} \quad 2-13$$

Con:

$$f(x) = \frac{1}{B} (x - x_0) + \frac{x}{l_t} \left(1 - \left(\frac{x}{l_t} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad 2-14$$

Llevando a cabo una integración basada en la fórmula de diferencias finitas de Euler, donde h es el paso de integración, se llega a la siguiente ecuación de iteración:

$$x_i - x_{i-1} - h \frac{(1 - \mu_r f(x_i))}{\mu_r + f(x_i)} = 0 \quad 2-15$$

esta se resuelve mediante el método de Newton Rapson, que se supone con suficiente precisión para este proyecto, y cuya salida será el recorrido del centro del rodillo para unos parámetros dados. Los valores iniciales de x serán $(x(y_0) = X_0 \text{ con } y_0 = 0)$, considerando que X_0 puede ser diferente a x_0 , el muelle puede estar deformado inicialmente.

2.4 Influencia de los diferentes parámetros y consideraciones de diseño.

Una vez se tiene la expresión matemática para obtener el perfil se estudia la influencia de cada uno de los parámetros de diseño del mecanismo en la forma del perfil de la leva. Para ello se representan en cada uno de los casos los diferentes perfiles que se obtendrían con diferentes valores del parámetro en cuestión, manteniendo los demás con un valor constante.

2.4.1 Influencia del coeficiente de fricción.

Así en la siguiente imagen se representan los diferentes perfiles que son producto de la salida de la ecuación iterativa anterior, considerando diferentes valores de μ_r . Cada uno de los perfiles de estos valores se representa con un color. Así los tres primeros colores de derecha a izquierda representan las superficies de leva obtenidas para los valores de resistencia a la rodadura representados y a su vez, las gráficas de izquierda a derecha, para los mismos valores de resistencia a la rodadura, pero considerando el movimiento inverso del mecanismo.

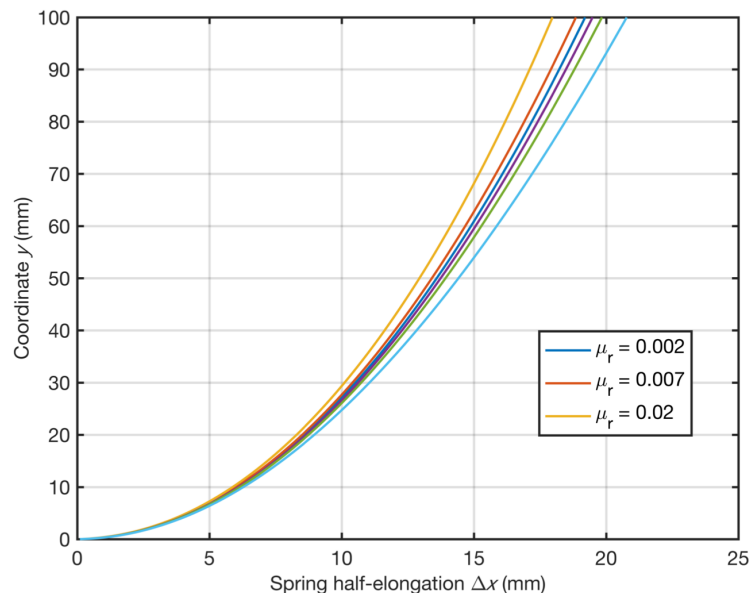


Figura 2-5 Trayectoria del centro del rodillo en función de varios valores de μ_r y distintas direcciones.

Como bien se puede apreciar en la imagen anterior, la fricción es un parámetro importante que tiene su principal repercusión en aquellos sistemas de leva que vayan a ser usados tanto para movimiento de subida como de bajada. Si este es el caso, es conveniente usar un perfil intermedio, porque si se usa solo uno de los dos, se tendrá un comportamiento indeseado en una

de las carreras. Por otro lado, para minimizar este efecto, unos valores de fricción más pequeños darían un mejor comportamiento.

2.4.2 Influencia de la longitud de la correa.

En el diseño de las correas, su longitud l_t también es un parámetro a determinar que juega bastante importancia en el diseño del perfil. Mientras menor sea la longitud de l_t , mayor es el ángulo α , aumentando así la tensión en los brazos y por tanto la fuerza normal y de ahí una mayor fuerza de fricción. Al tener una mayor fuerza de fricción se tiene una mayor influencia de esta en el diseño del perfil, por lo que se prefiere una correa de mayor tamaño, que termina derivando en los mismos problemas antes expuestos.

2.4.3 Influencia de la rigidez.

Con el parámetro correspondiente a la rigidez del muelle ocurre prácticamente el mismo fenómeno que con el coeficiente de fricción a la rodadura μ_r . Se obtienen trayectorias diferentes según el movimiento del rodillo sea de subida o de bajada, pero, aun así, se puede minimizar este efecto eligiendo rigideces mayores.

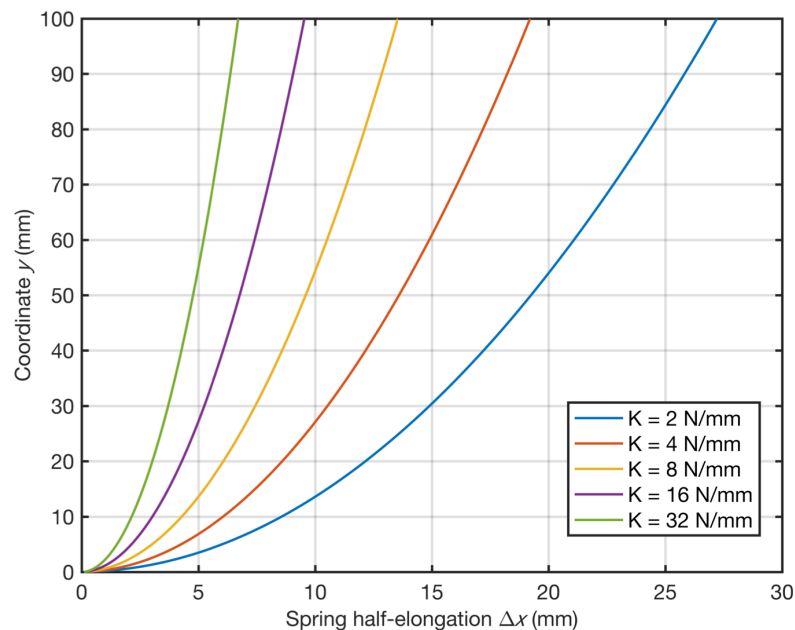


Figura 2-6 Trayectoria del centro del rodillo en función de varios valores de k y distintas direcciones.

A la hora de elegir una rigidez mayor, se sacia el problema con el parámetro k , pero se incrementa el problema con la fricción, que para suavizar su efecto se requieren anchuras de leva mayores. Un tamaño de leva mayor, además de tener las inconveniencias de espacio, en caso de que este fuera importante, supone un limitador a la hora de elegir un muelle, ya que su elongación puede que no sea suficiente.

2.4.4 Influencia de la consideración de la fricción.

Por último, para determinar a la perfección la influencia de la fricción se puede estudiar el ratio entre aquella fuerza que, si considera el coeficiente de fricción y la que no, de forma que nos queda la siguiente expresión como;

$$\frac{F'}{F} = \left(\frac{1 - \mu_r \tan \beta}{\tan \beta + \mu_r} - \tan \alpha \right) \left(\frac{1}{\tan \beta} - \tan \alpha \right)^{-1} \quad 2-16$$

Que resulta como función únicamente de la pendiente, la fricción en sí y el ángulo α .

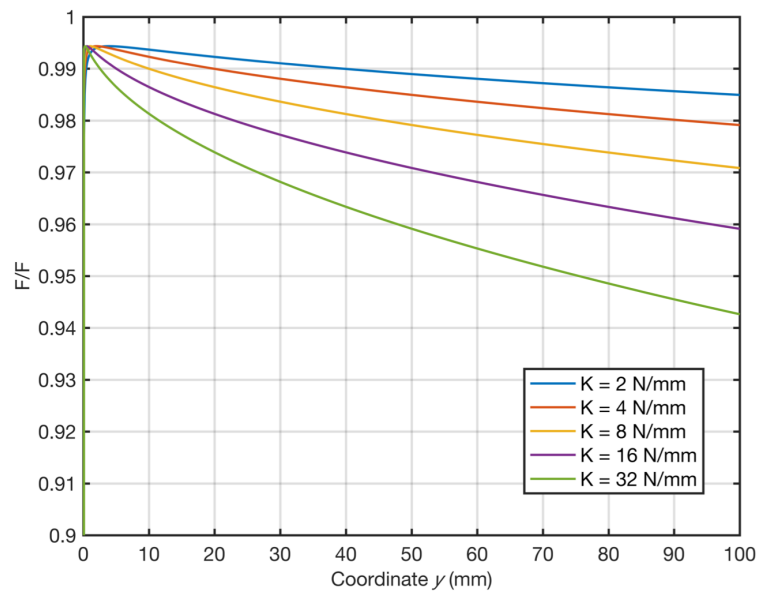


Figura 2-7 Ratio F/F' en función de los diferentes valores que pueden ir tomando l_t

Esta última gráfica F/F' tiene un máximo en $y = 1 \text{ mm}$ para valores menores, el ratio disminuye rápidamente. Antes de llegar a $y = 1 \text{ mm}$ el ratio F/F' cae a los valores más bajos, que pueden ser obviados situando el punto inicial de desplazamiento de la leva en $y = 5 \text{ mm}$, por ejemplo, importante para las condiciones iniciales en los siguientes capítulos.

De esta forma, en este apartado queda definido el diseño conceptual que se llevó a cabo en (Javier López-Martínez, 2017), así como un desglose detallado del procedimiento usado y todas las expresiones y parámetros que tienen influencia en la determinación del perfil de leva de la que se hará el análisis dinámico y que serán de interés en los siguientes capítulos.

3 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

The ability to simplify means to eliminate the unnecessary so that the necessary may speak.
- Hans Hoffman -

Antes de comenzar con el estudio del sistema es conveniente definir todas sus características para plantear el estudio del problema de forma más simple posible sin perder información. Así, en este capítulo se determinarán todas y cada una de las simplificaciones tomadas en el mecanismo y se eligen los sólidos que serán protagonistas.

3.1 Simplificaciones y definición del sistema

El mecanismo original es el que se presenta en la imagen siguiente.



Figura 3-1 Mecanismo de leva a estudiar diseñado mediante la herramienta SolidWorks.

Para su estudio, se trata en este apartado de simplificarlo lo máximo posible sin perder ninguna de las características cinemáticas y dinámicas de este. Así los resultados obtenidos a partir del modelo simplificado se ajustarán a la perfección al modelo real.

3.1.1 Simplificaciones del sistema

Comenzando por los aspectos geométricos del sistema, se tiene que es completamente simétrico respecto al plano (y-x) y plano (y-z).

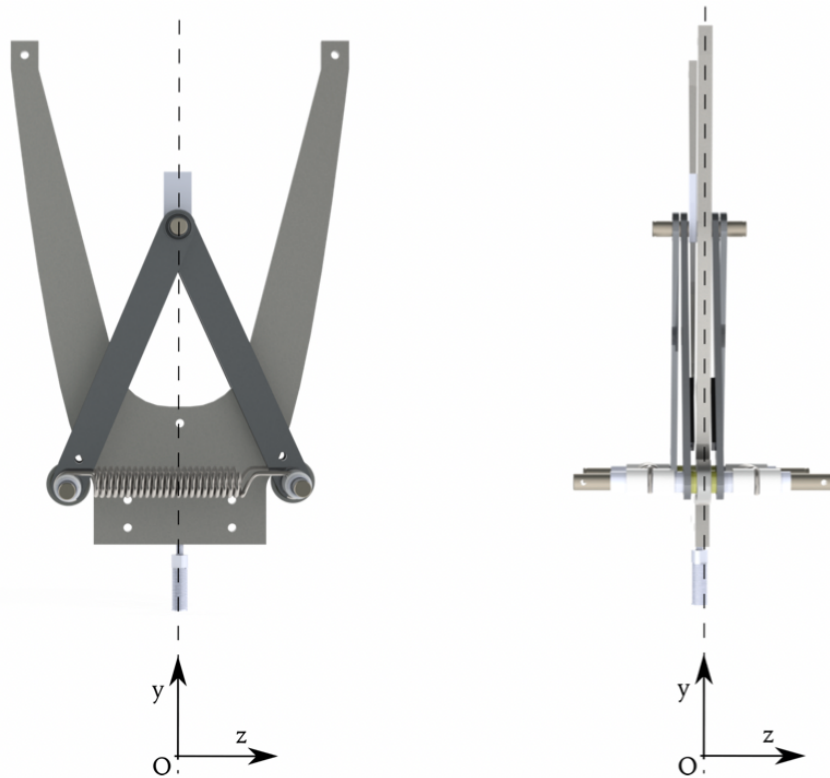


Figura 3-2 Planos de simetría del mecanismo. A la derecha (z-x) y a la izquierda (z-y).

Así, se puede comenzar aquí llevando a cabo una simplificación por cada simetría. La simetría de todos y cada uno de los planos respecto al plano (z-y) hace que todos los puntos se muevan en planos paralelos, llevando a que el sistema pase a llamarse mecanismo plano, no por su planitud geométrica, si no por la simetría respecto al plano (z-y) de todos sus puntos.

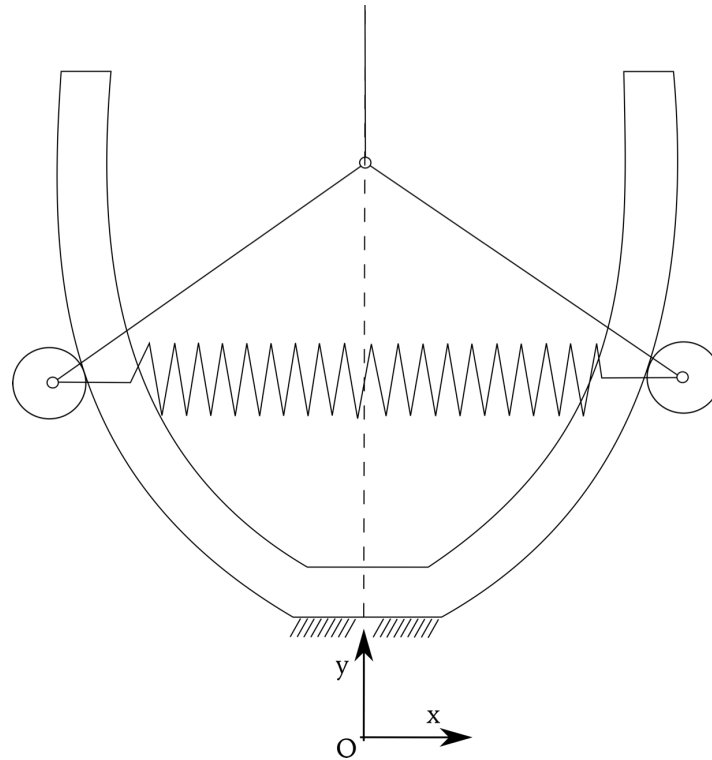


Figura 3-3 Mecanismo considerado como plano por la simetría (z-y).

Si además le se aplica la propiedad de simetría respecto al plano (y-x) se puede considerar que el comportamiento del sistema será exactamente igual a un lado y a otro de este plano, quedando el sistema como sigue en la imagen.

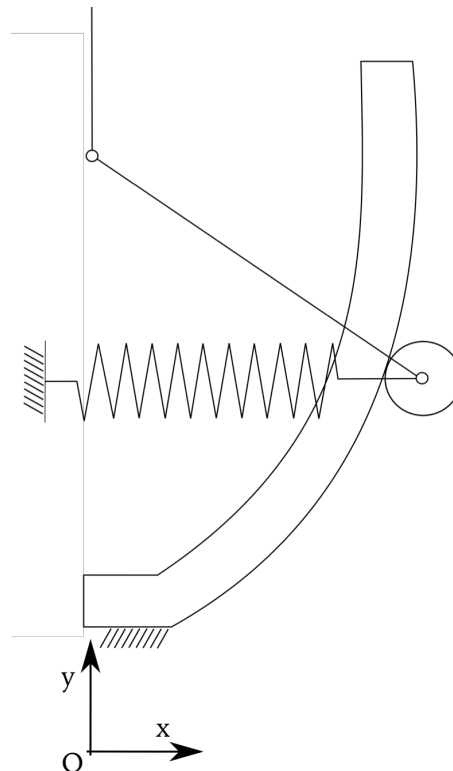


Figura 3-4 Mecanismo plano simplificado por la simetría (x-z).

3.1.2 Sólidos del sistema

Para seguir simplificando el sistema y hacer de su estudio algo más liviano, se divide el mecanismo al completo en diferentes partes. Si se centra la atención en los diferentes sólidos remanentes en la última simplificación, y se estudian las relaciones entre estos, se llega a un último esquema que define al completo el sistema a estudiar.

El mecanismo en su conjunto se puede llegar a dividir en cinco partes o elementos relacionados entre ellos, de las cuales cuatro son sólidos y la quinta parte es el elemento elástico.

Entendiendo el movimiento que realizan cada uno de los sólidos se tiene que la leva será el *Sólido 1* o *barra fija*. La *barra fija* se define como su propio nombre indica como el único sólido que no realizará ningún desplazamiento, ni deformación y será la base y origen para los demás sólidos.

El *Sólido 2* será el rodillo que rodará sin deslizar a lo largo del perfil del *Sólido 1*, formando así, como después de detallará, un *par de leva*. El *Sólido 2* se encontrará unido a la correa, *Sólido 3*, mediante un *par de rotación*. Este último sólido se encarga de transmitir el movimiento al *Sólido 2*, desde el actuador que corresponde al *Sólido 4*. Este último sólido está unido al *Sólido 3*, también mediante un *par de rotación*.

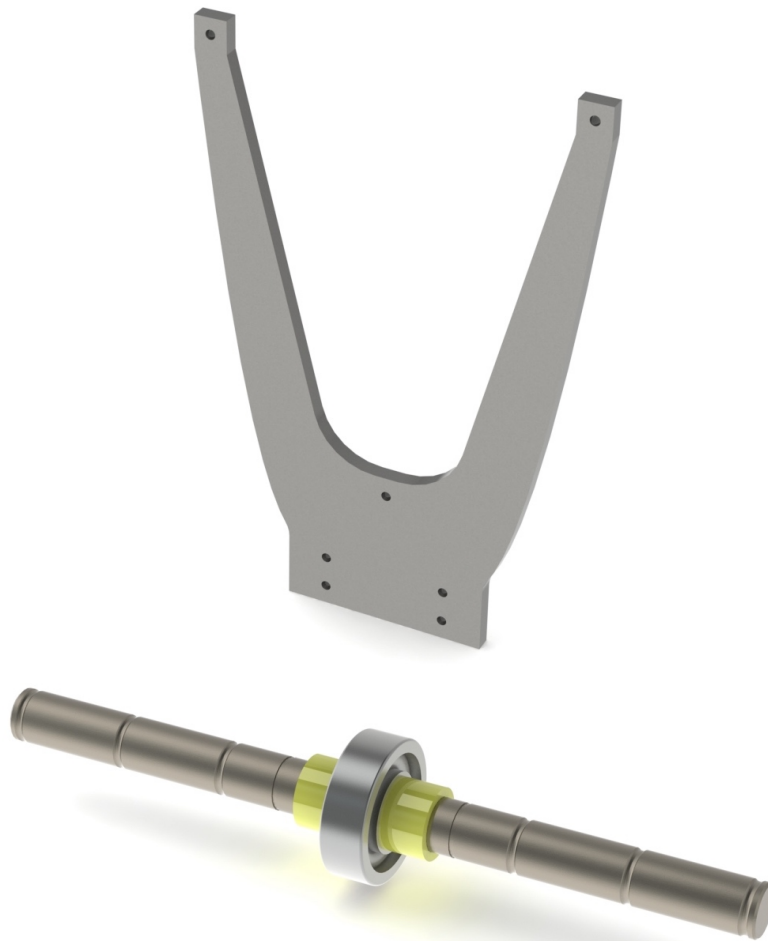




Figura 3-5 Sólidos y elemento elástico que componen el sistema. De izquierda a derecha y desde arriba; sólido 1, sólido 2, sólido 3 y 4, y elemento elástico

Quedando el sistema representado esquemáticamente, mediante los sólidos y elementos elásticos que lo componen, como sigue. Además, se acotan en dicha figura algunas magnitudes de interés, así como puntos de relevancia.

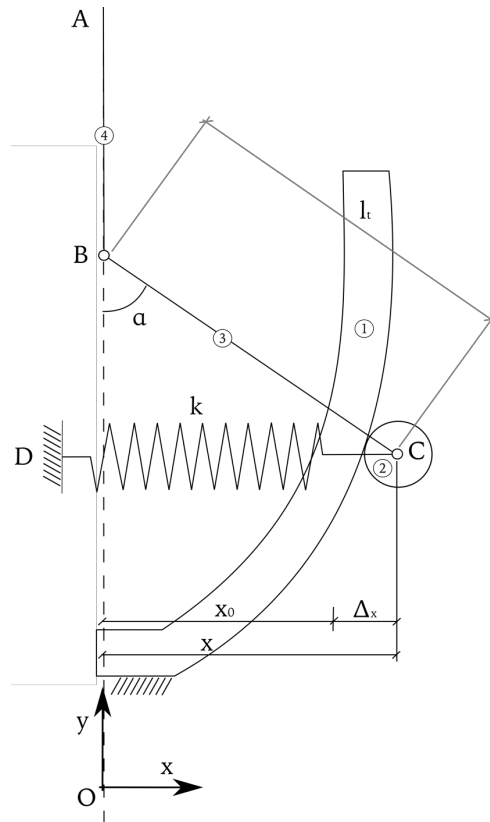


Figura 3-6 Sólidos y elemento elástico conformando el mecanismo esquemáticamente.

En este punto, si se aplica rigurosamente las propiedades de simetría, al *Sólido 4* y al elemento elástico se llega a una nueva característica del sistema.

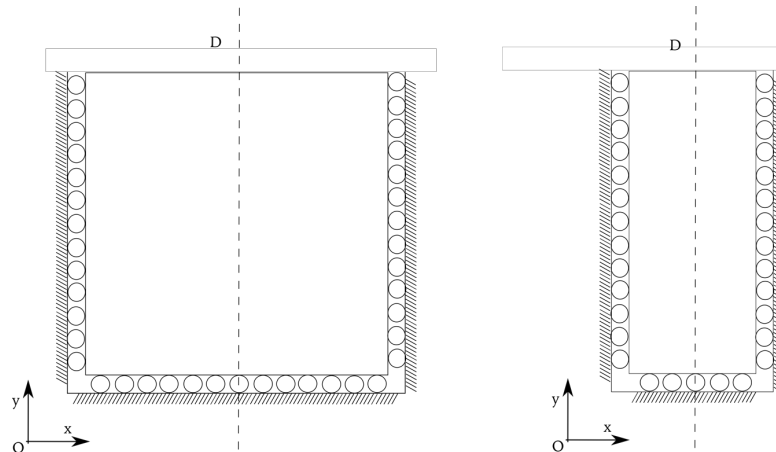


Figura 3-7 Aplicación rigurosa de la simetría.

Teniendo además en cuenta que el *Sólido 4* solo realizará movimientos verticales, obligado por la propia geométrica del mecanismo, se puede asumir que el *Sólido 4* sufrirá una restricción de *par prismático* con la *barra fija*, o *Sólido 1*.

Por otro lado, el *Sólido 2*, también está unido el elemento elástico, que originalmente unía ambos rodillos y de la forma en la que se ha ido simplificando el sistema, el muelle queda unido entre el *Sólido 2* y la *Barra fija* o *Sólido 1*, contrayéndose o expandiéndose según el *Sólido 2* suba o baje por el perfil de la *barra fija*. Por esto, se define la unión del elemento elástico a la barra fija, mediante un *par prismático* con movimiento vertical. Este par, hará que el muelle permanezca horizontal en todo instante y a la misma altura del centro de gravedad del *Sólido 2*.

Teniendo en cuenta los sólidos considerados y el papel y vínculos con el que juega cada uno de ellos, se llega al esquema final del sistema. Este esquema definitivo no pierde información respecto al sistema original y es el que se tratará a lo largo de todo este estudio.

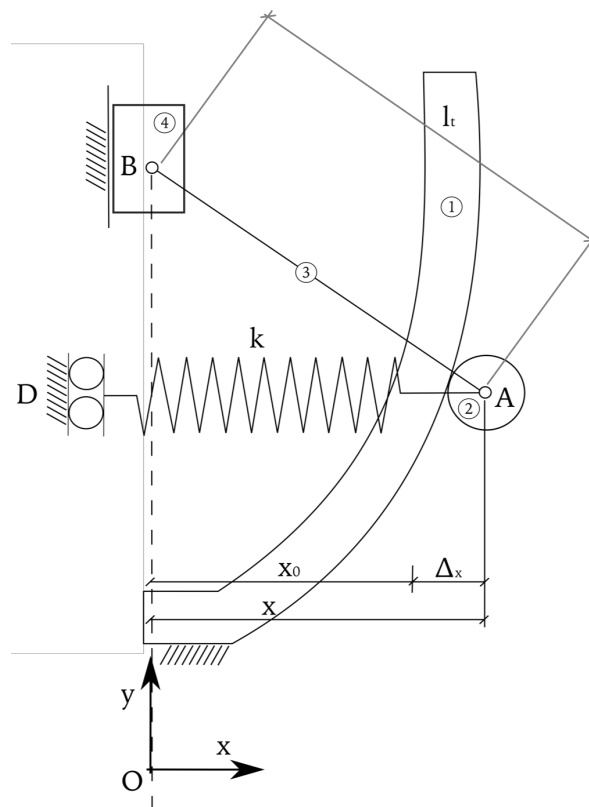


Figura 3-8 Esquema y simplificación final del sistema que se lleva a estudio.

Finalmente, aunque no influye en el esquema del modelo en sí, es necesario para definir completamente el sistema saber que el *Sólido 4* correrá el papel de actuador. Mediante esta parte del mecanismo el usuario creará el input de fuerza al mecanismo.

4 CINEMÁTICA DEL SISTEMA

*The laws of nature are written by the hand of
God in the language of mathematics.
- Galileo Galilei -*

Una vez conocido a la perfección el sistema, se pasa en este capítulo a conocer los pares cinemáticos, suspensionales y actuadores que relacionan entre sí a los diferentes sólidos, así como las entidades matemáticas que gobiernan estas uniones entre los sólidos del mecanismo. Destacar que el punto de vista desde el que se definirá el sistema está dirigido a un planteamiento y resolución computacional de todas las ecuaciones, algoritmos y procedimientos. Esto termina derivando en el método sistemático que se sigue en (Franco, 2017), que como en los siguientes apartados se verá, escapa a la lógica si pretende resolverlo una persona en vez de un computador. Aun así, al final del capítulo, se hará un planteamiento menos sistemático y más lógico, con un uso más reservado de coordenadas y por tanto de restricciones, para así tener una visión de ambos planteamientos.

En el transcurso de este capítulo, diferentes magnitudes y relaciones entre estas que serán de interés en el mismo capítulo y en los siguientes.

4.1 Selección de coordenadas

Para realizar un estudio eficaz y sistemático del sistema, lo fundamental es elegir un conjunto apropiado de coordenadas. Estas coordenadas permitirán determinar la posición y orientación de los sólidos rígidos, así como la deformación de aquellos que tengan esta propiedad.

La principal característica de las coordenadas es que no pueden tomar cualquier valor, son *dependientes* cumpliendo así las ecuaciones de restricción que se determinaran en los siguientes apartados. Existen muchas formas de elegir las coordenadas de cualquier mecanismo, pero dado que el fin de este estudio es su implementación computacional se usarán las coordenadas de referencia.

Las coordenadas elegidas se definen mediante dos sistemas de referencia, uno global $\langle O, X, Y \rangle$ y un sistema de referencia local de cada sólido $\langle o^i, x^i, y^i \rangle$ que en el caso de la barra fija coincidirá con el global, por su sencilla localización y por su característica de inmovilidad. Los sistemas de referencia locales acompañan a cada uno de los sólidos en su movimiento de translación y rotación, y contienen las coordenadas generalizadas que determinan la posición de cada sólido respecto al sistema de referencia global. Así, el conjunto de todos los sólidos con cada uno de sus sistemas de referencia locales y el sistema de referencia global, queda representado como sigue.

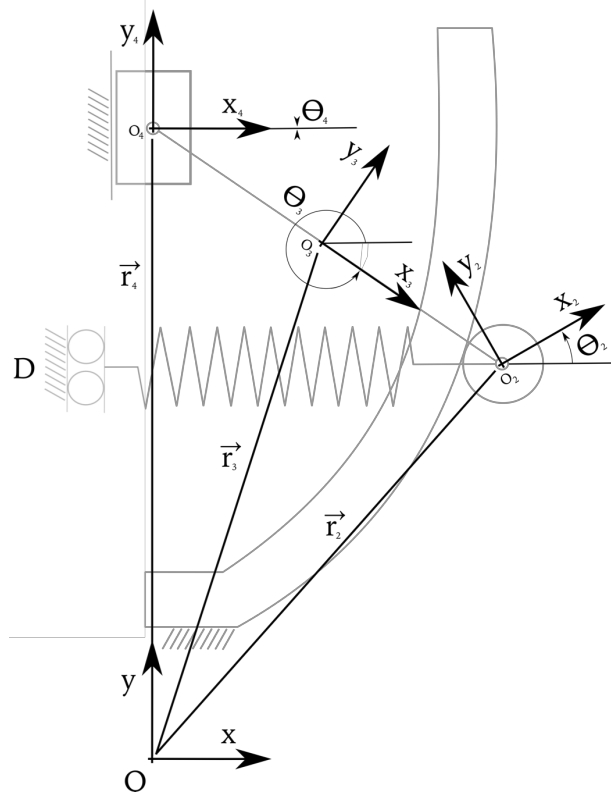


Figura 4-1 Sistema con coordenadas globales y de referencia de cada sólido.

Donde las coordenadas generalizadas de referencia de un sólido son definidas como:

$$q^{iT} = [x_i \quad y_i \quad \theta_i], \quad i = 2,3,4. \quad 4-1$$

Y las del sistema en general en primera instancia podría quedar como:

$$q^T = [x_1 \quad y_1 \quad \theta_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad \theta_2 \quad x_3 \quad y_3 \quad \theta_3 \quad x_4 \quad y_4 \quad \theta_4] \quad 4-2$$

O de forma más simplificada como:

$$q = [q^{1T} \quad q^{2T} \quad q^{3T} \quad q^{4T}] \quad 4-3$$

Donde a partir de este punto, en este documento se omiten las del sólido primero por simplificar, ya que estas siempre tendrán valor nulo, por su ligadura a la barra fija y coincidencia con el sistema de referencia global. Sin embargo, computacionalmente se mantendrán, para así seguir con el planteamiento sistemático del sistema.

$$q^{1T} = [x_1 \quad y_1 \quad \theta_1] = [0 \quad 0 \quad 0] \quad 4-4$$

En esta línea también se podrían haber omitido las coordenadas θ_4 y x_4 ya que el *Sólido 4* al estar restringido por el *par prismático* no podrá ni rotar, ni desplazarse horizontalmente. Aun así, estas coordenadas se mantendrán con el propósito de mantener un procedimiento sistemático que ayude en los siguientes apartados a la determinación más sencilla de las ecuaciones que definirán el sistema.

Como bien es sabido, el mecanismo en cuestión tiene un par de leva, el cual es la restricción que resultará más interesante de estudiar. Para ello, es necesario definir dos coordenadas más, llamadas coordenadas no generalizadas, que ayudaran a la hora de definir las restricciones de este vínculo entre sólidos del sistema. Estas dos nuevas coordenadas se definen con el propósito de determinar el punto de contacto entre el *Sólido 2* y el perfil de la *barra fija*.

La primera de ellas, ϕ^2 , se define como el ángulo existente entre el eje horizontal del sistema de referencia local del *Sólido 2* y el eje que une el centro de gravedad del sólido segundo con el punto de contacto, del rodillo y perfil de leva, definido en sentido levógiro. Por otro lado, y y $x(y)$ es la coordenada que determina la posición del punto de contacto de la leva y el *Sólido 2*, con origen el sistema de referencia global, de forma cartesiana.

En la figura siguiente (*Figura 3.9*), se pueden apreciar estas dos nuevas coordenadas.

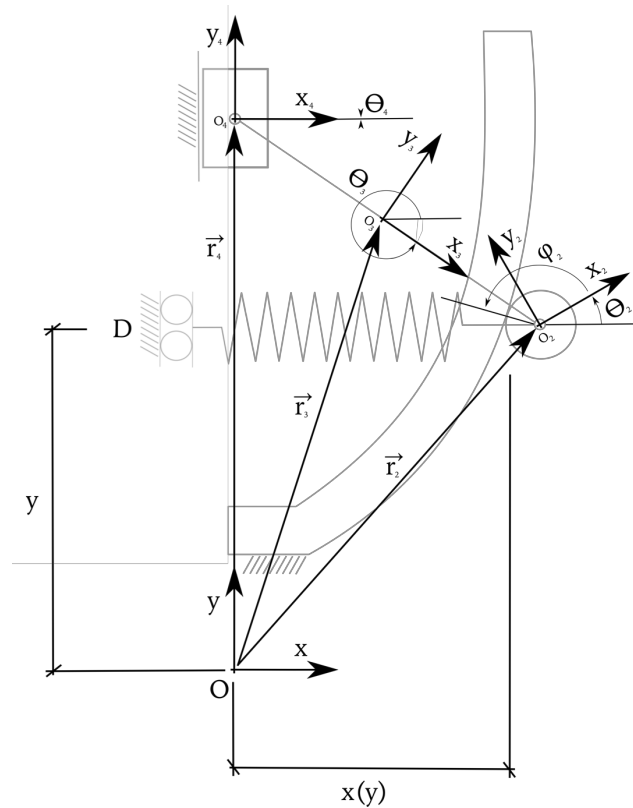


Figura 4-2 Sistema con coordenadas generalizadas globales y de referencia de cada sólido. Además, las coordenadas no generalizadas.

De esta forma, las coordenadas definitivas, generalizadas y no generalizadas, que se usaran para el estudio del mecanismo quedan como:

$$q = [x_2 \quad y_2 \quad \theta_2 \quad x_3 \quad y_3 \quad \theta_3 \quad x_4 \quad y_4 \quad \theta_4 \quad \phi^2 \quad y] \quad 4-5$$

o de forma más simple como:

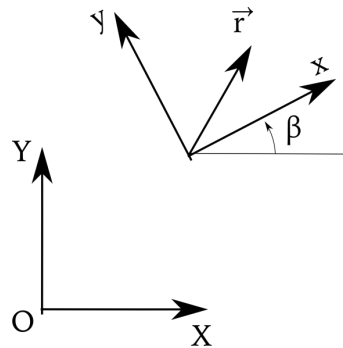
$$q = [q^{2^T} \quad q^{3^T} \quad q^{4^T} \quad q^{L^T}] \quad 4-6$$

Donde q^{L^T} contiene a las coordenadas que ayudaran a definir las restricciones pertenecientes al par de leva.

Por tanto, el mecanismo queda descrito por 14 coordenadas que, como más adelante se desarrollará, deberán cumplir 13 restricciones definidas por los pares cinemáticos que unen cada uno de los sólidos. De esta forma se podrá apreciar matemáticamente el grado de libertad del que goza el mecanismo. Este será eliminado con una restricción adicional a las restricciones introducidas por los pares cinemáticos que vendrá definida por el actuador o fuerza de input, F .

4.2 Matrices de transformación

Según se han definido las coordenadas del sistema, se tiene que varios sistemas de referencias locales a lo largo del movimiento del sistema, rotarán.



Por tanto, para conocer la situación geométrica, respecto al sistema de referencia global, de algún punto del mecanismo ligado a un sistema de referencia local será necesario transformar las coordenadas para así definir la localización exacta del punto del sólido que estemos estudiando, respecto al sistema de referencia deseado.

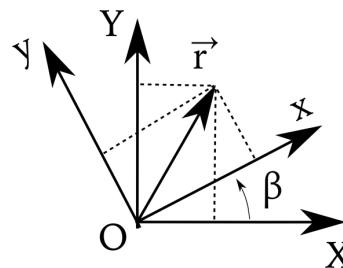


Figura 4-3 Sistema con coordenadas globales y de referencia de cada sólido.

Como se puede ver en la imagen anterior se representa un vector \vec{r} que está ligado al sistema de referencia local $\langle o, x, y \rangle$ y que por otro lado se encuentra el sistema de referencia global $\langle O, X, Y \rangle$. Estos dos sistemas de referencia son diferentes, pero realizando unas sencillas operaciones se encuentra que están relacionados mediante el mismo ángulo que muestra la coordenada θ^i que representa el giro del sistema de referencia local, siendo $\theta^i = \beta$. Así se tiene que la relación entre cada uno de los sistemas de referencia es

$$\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{b}_x \\ \bar{b}_y \end{bmatrix} \quad 4-7$$

o de forma simplificada;

$$b = A^i \bar{b} \quad 4-8$$

Así se define a la matriz A^i como matriz de transformación o de giro del *Sólido i*. Que como bien se ha visto anteriormente nos permite obtener las coordenadas ligadas a un sistema de referencia a partir de esas mismas coordenadas ligadas a otro sistema de referencia.

4.3 Coordenadas de referencia del sistema

El siguiente apartado pretende determinar la posición de cualquier punto de un sólido una vez que sean conocidas las coordenadas de referencia de dicho sólido. Conociendo la posición, si además se conoce el valor numérico de su derivada primera y segunda, se llegará a obtener la velocidad y aceleración. El valor de todas estas variables será necesario para definir otras magnitudes estrictamente necesarias para llegar al análisis dinámico del sistema.

En primer lugar, para conocer la posición de un punto de un sólido, respecto al sistema de referencia global de cualquier punto P , perteneciente o no a un *Sólido i* pero si relativo a él, se hace uso de la ecuación fundamental de la cinemática con coordenadas de referencia.

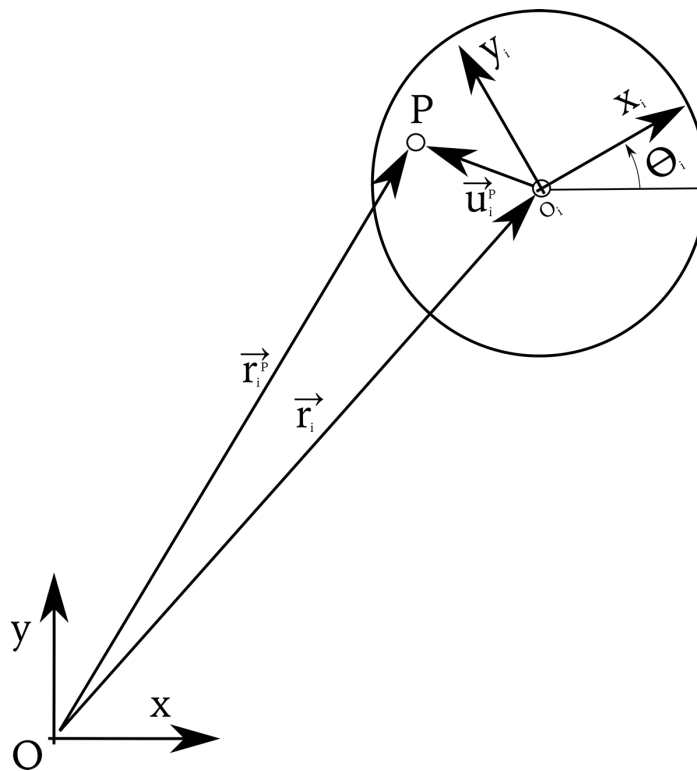


Figura 4-4 Coordenadas de referencia para un punto P del *Sólido i*.

$$r_{pi} = r^i + u_p^i \quad 4-9$$

o, respecto al sistema de referencia global $\langle O, X, Y \rangle$, haciendo uso de (3-7):

$$r_p^i = r^i + A^i \bar{u}_p^i \quad 4-10$$

la ecuación (3-8) se desarrolla de la siguiente forma con las coordenadas de referencia del sólido en cuestión:

$$r_p^i(q^i, u_p^i) = \begin{bmatrix} r_x^i \\ r_y^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{px}^i \\ \bar{u}_{py}^i \end{bmatrix} \quad 4-11$$

donde u_p^i determina la posición del punto P en el sólido i en cualquier instante.

Para obtener la velocidad del punto P , se hace la derivada respecto al tiempo de la ecuación anterior, quedando:

$$v_p^i = \frac{dr_p^i}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{r}_x^i \\ \dot{r}_y^i \end{bmatrix} + \dot{\theta} \begin{bmatrix} -\sin\theta_i & -\cos\theta_i \\ \cos\theta_i & -\sin\theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{px}^i \\ \bar{u}_{py}^i \end{bmatrix} \quad 4-12$$

la derivada parcial de la matriz de giro con respecto a la coordenada que determina el giro del sólido al que pertenece, se puede simplificar como:

$$\frac{\partial A^i}{\partial \theta^i} = A^i = \begin{bmatrix} -\sin\theta_i & -\cos\theta_i \\ \cos\theta_i & -\sin\theta_i \end{bmatrix} \quad 4-13$$

de esta forma, se puede escribir la ecuación anterior de forma más compacta como:

$$v_p^i = \dot{r}^i + \theta^i A^i \bar{u}_p^i \quad 4-14$$

Una forma de llegar al mismo resultado, pero de forma más compacta es aplicando la regla de la cadena, de forma que:

$$v_p^i = \frac{dr_p^i}{dq^i} \frac{dq^i}{dt} = H_P^i \dot{q}^i \quad 4-15$$

con:

$$H_P^i = \frac{dr_p^i}{dq^i} = \begin{bmatrix} \frac{dr_{px}^i}{dr_x^i} & \frac{dr_{px}^i}{dr_y^i} & \frac{dr_{px}^i}{d\theta^i} \\ \frac{dr_{py}^i}{dr_x^i} & \frac{dr_{py}^i}{dr_y^i} & \frac{dr_{py}^i}{d\theta^i} \end{bmatrix} \quad 4-16$$

denominada H_P^i como matriz jacobiana de la posición con respecto a las coordenadas de referencia del Sólido i . Pudiéndose simplificar como:

$$H_P^i = [1_{2 \times 2} \quad A_\theta^i \bar{u}_p^i] \quad 4-17$$

Dicha matriz no es constante, dependiendo en todo momento de las coordenadas que determinan el giro, θ^i mediante A^i , y su uso será de gran importancia en los siguientes capítulos.

Por otro lado, igual que se obtuvo la velocidad a partir de la posición, obtenemos la aceleración como:

$$a_p^i = \frac{d^2 r_p^i}{dt^2} = \ddot{r}^j + \ddot{A}^i \bar{u}_p^i = \begin{bmatrix} \ddot{r}_x^i \\ \ddot{r}_y^i \end{bmatrix} + \left(\ddot{\theta}^i \begin{bmatrix} -\sin\theta_i & -\cos\theta_i \\ \cos\theta_i & -\sin\theta_i \end{bmatrix} + (\dot{\theta}^i)^2 \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \bar{u}_{px}^i \\ \bar{u}_{py}^i \end{bmatrix} \quad 4-18$$

Y haciendo la misma simplificación con la matriz de rotación, pero esta vez teniendo en cuenta que también se cumple:

$$\frac{\partial^2 A_\theta^i}{\partial (\theta^i)^2} = \begin{bmatrix} -\cos\theta^i & \sin\theta^i \\ -\sin\theta^i & -\cos\theta^i \end{bmatrix} = -A^i \quad 4-19$$

con esto, la ecuación queda de forma que:

$$a_p^i = \ddot{r}^i + \ddot{\theta}^i A_\theta^i \bar{u}_p^i - (\dot{\theta}^i)^2 A^i \bar{u}_p^i \quad 4-20$$

y, por otro lado, de forma alternativa, aplicando la regla de la cadena, de igual forma que se hizo con la velocidad, se tiene:

$$a_p^i = H_p^i \ddot{q}^i + \dot{H}_p^i \dot{q}^i \quad 4-21$$

donde;

$$\dot{H}_p^i = \frac{dH_p^i}{dq^i} \frac{dq^i}{dt} = \frac{dH_p^i}{dq^i} \dot{q}^i = \frac{d(H_p^i \dot{q}^i)}{dq^i} = \frac{\partial v_p^i}{\partial q^i} = h_p^i \quad 4-22$$

y en forma matricial:

$$h_p^i = [0_{2 \times 2} \quad -\dot{\theta}^i A^i \bar{u}_p^i] \quad 4-23$$

por lo que se tiene que el jacobiano de la velocidad respecto a las coordenadas de referencia, es la derivada respecto al tiempo del jacobiano H_p^i .

En estas ecuaciones se puede apreciar su dependencia respecto a los distintos parámetros y coordenadas, quedando como:

$$r_p^i = r_p^i(q^i, \bar{u}_p^i) \quad 4-24$$

$$v_p^i = v_p^i(q^i, \dot{q}^i, \bar{u}_p^i) \quad 4-25$$

$$a_p^i = a_p^i(q^i, \dot{q}^i, \ddot{q}^i, \bar{u}_p^i) \quad 4-26$$

Por lo que se deduce que para conocer la aceleración hay que tener definido el vector de posición del punto P , \bar{u}_p^i , así como, \dot{q}^i y q^i y para conocer la velocidad, \bar{u}_p^i y q^i .

Se tienen así definidas todas las expresiones que serán necesarias para la determinación de las ecuaciones de movimiento, dejando el sistema más simplificado y sistemático, esencial para una solución computarizada, como aquí se desea hacer.

4.4 Parámetros del sistema

En este punto, para determinar las restricciones a las que están sometidos los diferentes sólidos, es necesaria la definición completa del mecanismo y para ello son necesarias otras magnitudes llamadas parámetros, que mientras que las coordenadas pueden ir variando sus valores a lo largo del tiempo, los parámetros son constantes. Estos, pueden ser de muy diferente tipo: geométricos, inerciales (posición del centro de gravedad, masa, momentos de inercia) y otros (coeficientes de fricción, de rigidez, de

amortiguamiento) y como ya se vio en el *Capítulo 2*, todos ellos juegan un papel importante a la hora de definir las características del mecanismo.

En los siguientes apartados se definirán los parámetros que introducen cada uno de los sólidos, así como las ecuaciones que definen los puntos de interés de cada uno de los sólidos.

4.4.1 Sólido Segundo

El *Sólido 2* será el que realice el recorrido por el perfil del sólido primero. Su geometría y masa son de importante relevancia por las fuerzas de inercia que introducirá este sólido. Por un lado, la masa de este sólido se definirá como m_2 y su inercia como I_2 .

$$m_2 = 26.83 \text{ g} \quad 4-27$$

$$I_2 = 49145.76 \text{ gmm}^2 \quad 4-28$$

Otro parámetro de importante relevancia es el radio R_2 de este:

$$R_2 = 16 \text{ mm} \quad 4-29$$

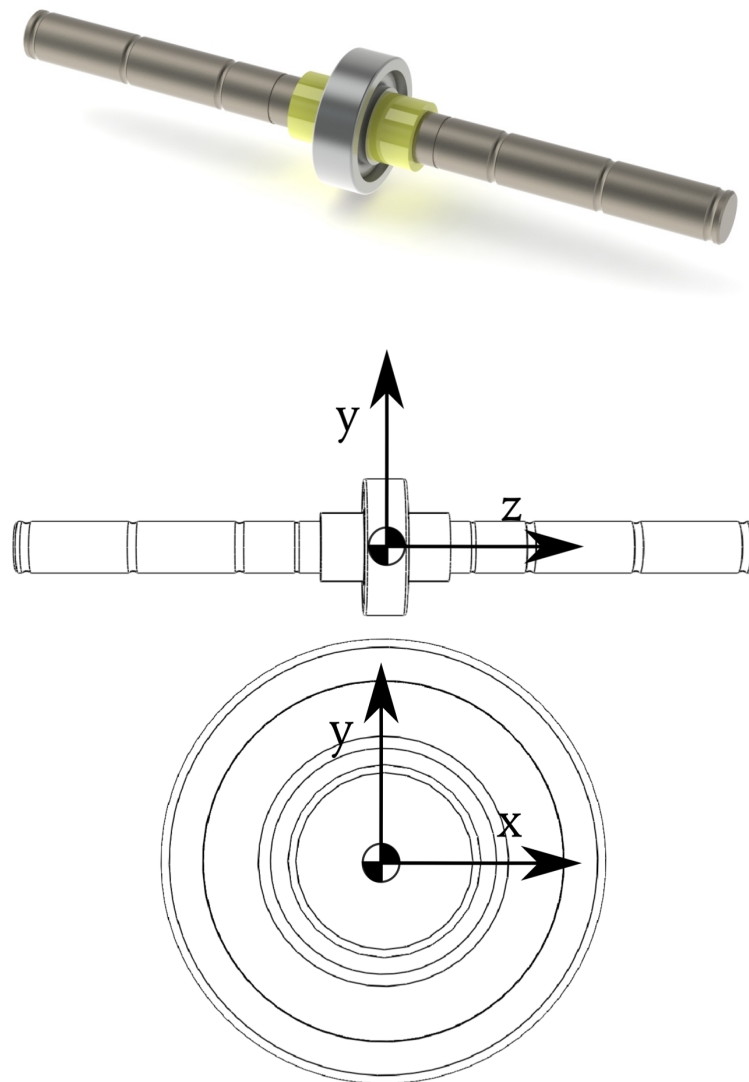


Figura 4-5 Sólido 2 y sus puntos de interés y coordenadas de referencia.

El *Sólido 2* introduce dos puntos que serán de interés y se utilizarán en los próximos apartados.

El primero de ellos es el denominado como o^2 , que determina el centro de gravedad del rodillo que coincide con su centro geométrico, al cual va unido el *Sólido 3* mediante el par de rotación. Este punto, al coincidir con el origen de las coordenadas locales del *Sólido 2* viene definido directamente como:

$$r_{o^2}^2(q^2, u_{o^2}^2) = \begin{bmatrix} r_x^2 \\ r_y^2 \end{bmatrix} \quad 4-30$$

El otro punto que gozará de bastante importancia en los siguientes apartados para definir las restricciones, es el punto de contacto entre el rodillo y la superficie del *Sólido 1* denominado P . La posición de este punto viene dada por:

$$r_P^2(q^2, u_P^2) = \begin{bmatrix} r_x^2 \\ r_y^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta^2 & -\sin\theta^2 \\ \sin\theta^2 & \cos\theta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R\cos\phi^2 \\ R\sin\phi^2 \end{bmatrix} \quad 4-31$$

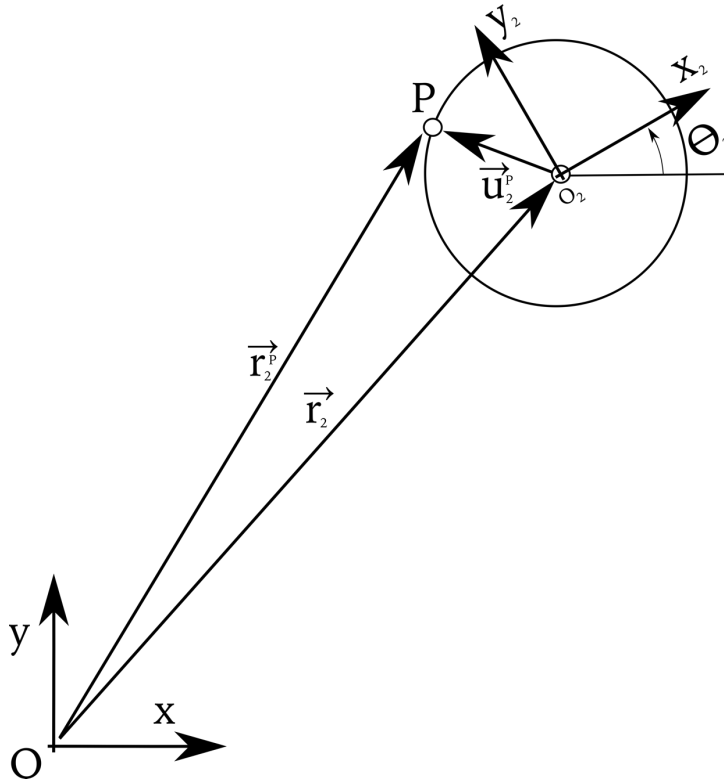


Figura 4-6 Vectores de posición de los puntos importantes del *Sólido 2*.

Del contacto de este sólido con el perfil de la leva surge un nuevo parámetro de importante relevancia tal y como se vio en el *Capítulo 2*. El coeficiente de rodadura entre la superficie de la leva y el rodillo en sí, tendrá una gran influencia y se define como:

$$\mu_R = 0.002 \quad 4-32$$

4.4.2 Sólido tercero

El *Sólido 3* comprende el nexo de unión entre el *Sólido 2* y el *Sólido 4*. Este está formado por un eslabón cuya masa e inercia son las siguientes:

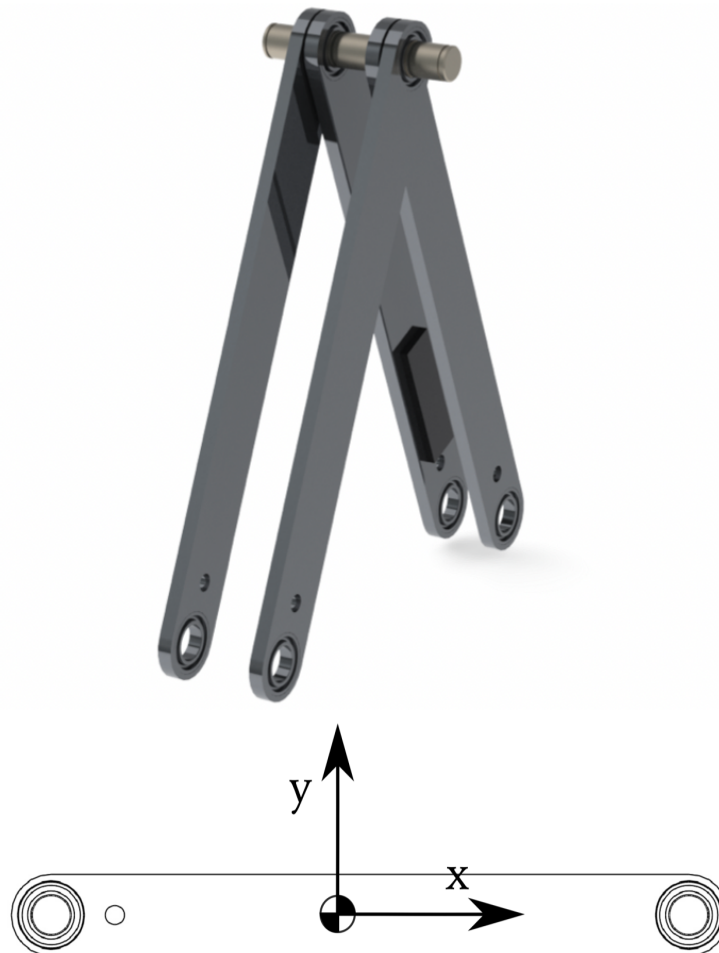
$$m_3 = 23.85 \text{ g} \quad 4-33$$

$$I_3 = 76237.26 \text{ gmm}^2 \quad 4-34$$

Este sólido como bien se vio en el *Capítulo 2* introduce un nuevo parámetro importante, la distancia entre los dos pares de rotación del sistema (Puntos A y B en el esquema).

$$l_3 = 200 \text{ mm} \quad 4-35$$

El *Sólido 3* realmente se compone de cuatro sólidos. Pero las simetrías realizadas, los dos eslabones de la derecha se suprimen del estudio, pero los restantes deben entrar en el estudio de forma que se tendrán en cuenta computacionalmente el doble de la masa m_3 e inercia I_3 .



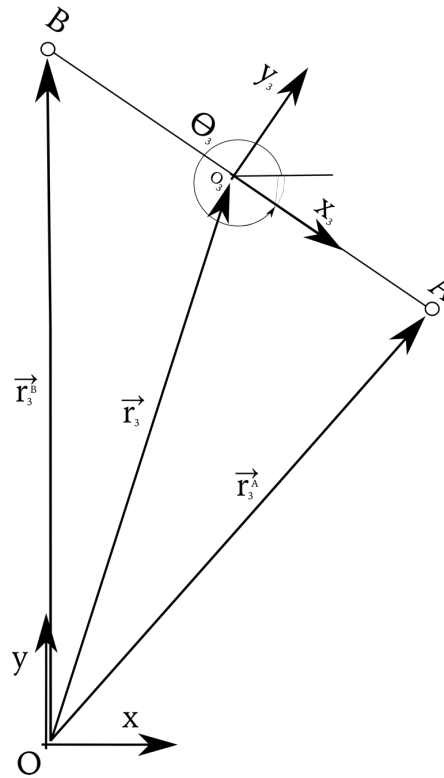


Figura 4-7 Puntos de interés y coordenadas de referencia del *Sólido 3*.

Como se puede ver en la figura anterior existen diferentes puntos de interés, además del centro de gravedad nombrado como o^3 , que coincide con su centro geométrico.

El punto A , determina el lugar en el que se produce la articulación con el *Sólido 2* y cuyas coordenadas de referencia vienen dadas mediante:

$$r_A^3(q^3, u_A^3) = \begin{bmatrix} r_x^3 \\ r_y^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta^3 & \sin\theta^3 \\ \sin\theta^3 & \cos\theta^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{l_t}{2} \\ \frac{l_3}{2} \end{bmatrix} \quad 4-36$$

Por otro lado, se tiene el *punto B* que determina el punto de contacto y donde se da el par de rotación entre el *sólido 3* y *Sólido 4*, determinado por:

$$r_B^3(q^3, u_B^3) = \begin{bmatrix} r_x^3 \\ r_y^3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos\theta^3 & \sin\theta^3 \\ \sin\theta^3 & \cos\theta^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{l_t}{2} \\ \frac{l_t}{2} \end{bmatrix} \quad 4-37$$

4.4.3 Sólido Cuarto

El *Sólido 4* como bien se comprende de los apartados anteriores solo realizará el movimiento vertical que se muestra. Su masa viene determinada como m_4 y su inercia como I_4 . Estos dos parámetros se reducen a la mitad, por el uso de las simetrías.

$$m_4 = 11.34 \text{ g} \quad 4-38$$

$$I_4 = 2922.14 \text{ gmm}^2 \quad 4-39$$

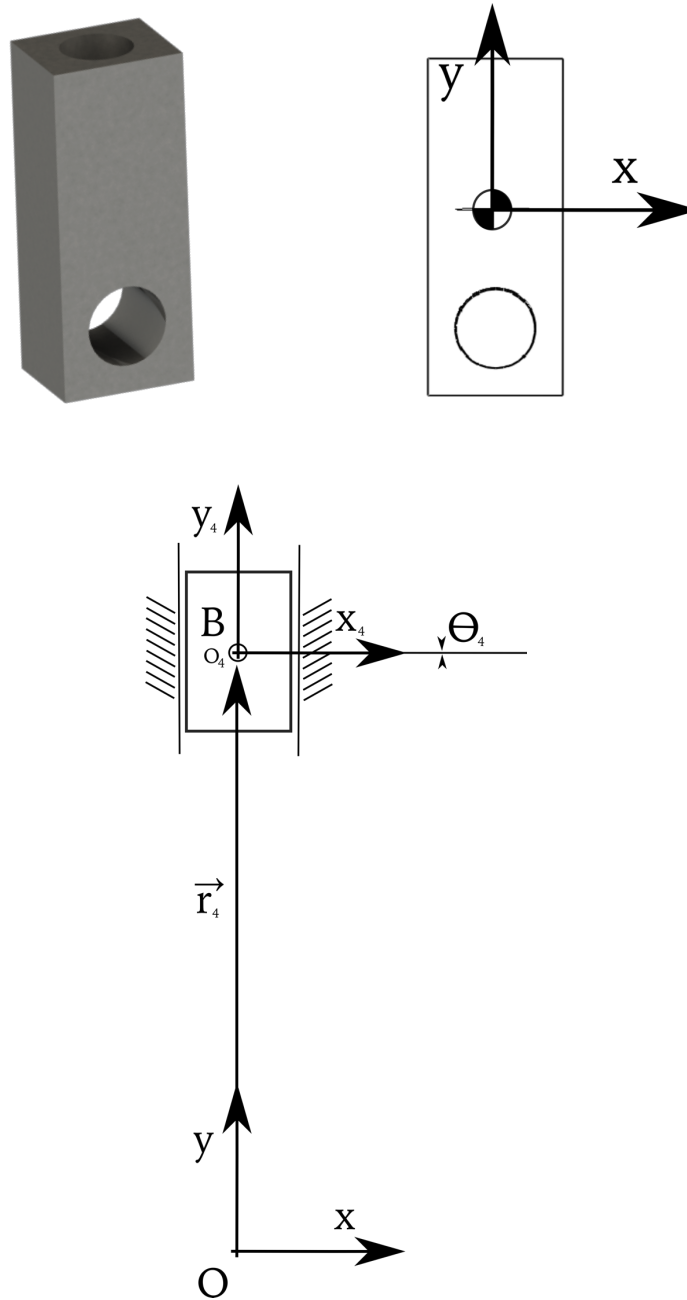


Figura 4-8 *Sólido 4* y sus puntos de interés y coordenadas de referencia.

En cuanto a puntos que sean de interés, se tiene el punto o^4 que determina el punto donde se da la rotación con el *Sólido 3*. Este punto al determinar además el centro de gravedad de este *Sólido 4*, queda determinado directamente mediante:

$$r_{o^4}^4(q^4, u_{o^4}^4) = \begin{bmatrix} r_x^4 \\ r_y^4 \end{bmatrix} \quad 4-40$$

4.4.4 Elemento elástico

Por último, se tiene el elemento elástico, el muelle, que originalmente, antes de simplificar el modelo, unía a ambos rodillos.

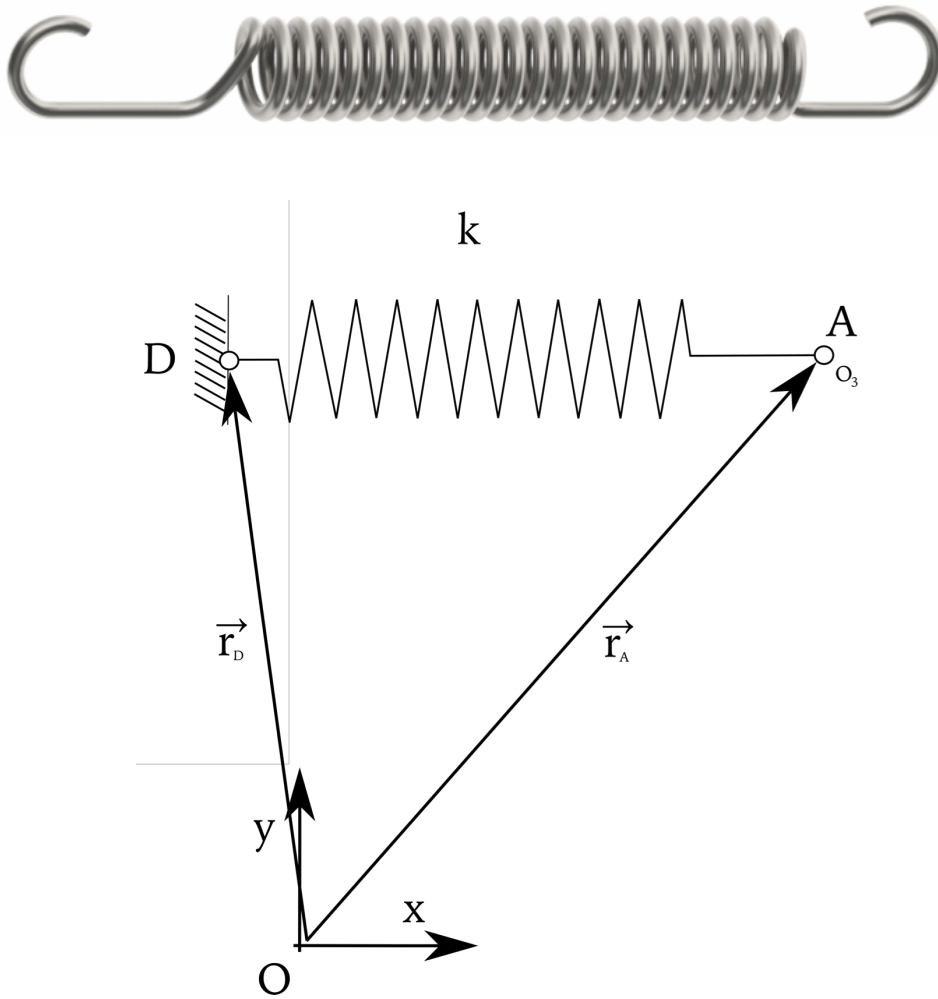


Figura 4-9 Elemento elástico del mecanismo.

En este caso, su geometría en primera instancia para la definición del modelo matemático no es de interés. La rigidez dada por k y su elongación inicial x_0 , serán parámetros determinantes.

$$k = 0.690 \frac{N}{mm} \quad 4-41$$

$$x_0 = 0.068 \text{ mm} \quad 4-42$$

Como bien se ha visto en el diseño inicial del mecanismo se tienen dos muelles, por lo que la rigidez aparecerá como $2k$. Además, se obtiene una duplicación en la extensión del muelle, ya que este se está deformando tanto por la rama de la leva izquierda, como por la derecha. Así se tendrá que $\Delta x = x - x_0$ esta consideración de los desplazamientos hace que se tenga:

$$2\Delta x = 2(x - x_0) \quad 4-43$$

Por otro lado, su masa primeramente no se tendría en cuenta en el sistema, ya que la forma en la que se implementa el resorte en las ecuaciones se considera como sólido estático y el implementar su masa

complicaría el sistema. Pero como ya se ha visto, el resorte se mantiene en todo instante horizontal y a la misma altura del centro de gravedad del *Sólido 2*, por lo que la masa del resorte se suma a la del *Sólido 2*, para así no perder esta información.

$$m_{2m} = m_2 + m_{muelle} = 26.83 \text{ g} + 80 \text{ g} = 106.83 \text{ g} \quad 4-44$$

En cuanto a puntos de interés, como bien ya se ha visto en los anteriores apartados, se tiene que el muelle se une al *Sólido 2* en el punto o_2 .

4.4.5 Sólido primero

El *Sólido 1* ya fue definido como la *barra fija*. Este sirve de base para todo el sistema y de superficie de rodadura para el *Sólido 2*.

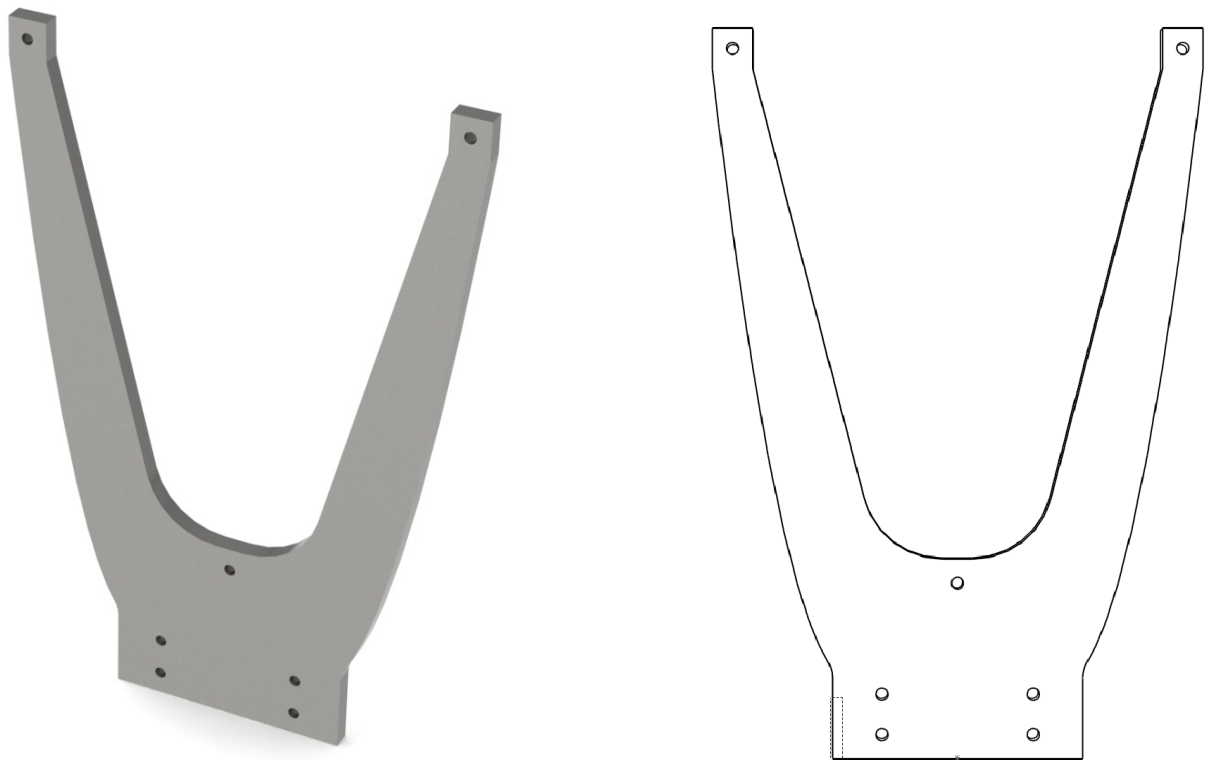


Figura 4-10 *Sólido 1.*

Su geometría fue determinada en (Javier López-Martínez, 2017) mediante las diferentes simplificaciones y estudios realizados. Las dimensiones de leva serán el principal parámetro de interés ya que, en función de su anchura, se obtendrá un comportamiento u otro. Con todos los parámetros definidos por los demás sólidos se obtiene el siguiente perfil.

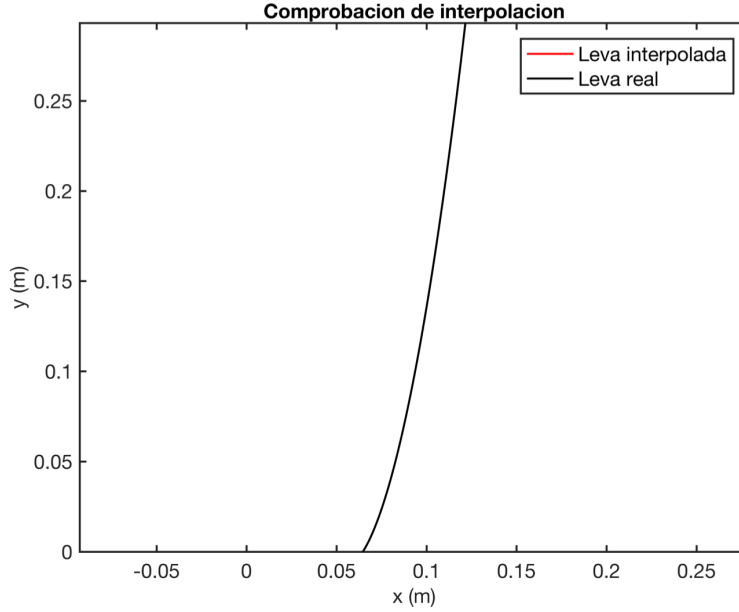


Figura 4-11 Perfil de leva obtenido a partir de los parámetros antes presentados.

Al ser fijo, para el estudio que se pretende hacer no interesa ninguna característica que influya en la dinámica del sistema como puede ser su masa y su inercia, aun así, mediante el modelo realizado en la herramienta de diseño *Solidworks* se obtienen estos parámetros.

$$m_1 = 312.82 \text{ g} \quad 4-45$$

$$I_1 = 4515544.93 \text{ gmm}^2 \quad 4-46$$

Como bien se comentó, las coordenadas de este sólido no se tienen en cuenta, ya que son todas nulas, por lo que desarrollando la expresión que determina la posición de cualquier punto del sólido se tiene:

$$r_p^1(q^1, u_p^1) = \begin{bmatrix} r_x^1 \\ r_y^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta^1 & \sin\theta^1 \\ \sin\theta^1 & \cos\theta^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{px}^1 \\ \bar{u}_{py}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{px}^1 \\ \bar{u}_{py}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_{px}^1 \\ \bar{u}_{py}^1 \end{bmatrix} \quad 4-47$$

donde la posición de cada uno de los puntos viene definida directamente por su vector de posición ya que el sistema de referencia local $\langle o^1, x^1, y^1 \rangle$ es coincidente con el global $\langle O, X, Y \rangle$ y además la barra es fija.

Teniendo esta última expresión y sabiendo que el punto de mayor interés del *Sólido 1* es su perfil en sí, la localización de cualquiera de estos puntos sería:

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_{px}^1 \\ \bar{u}_{py}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(y) \\ y \end{bmatrix} \quad 4-48$$

Y sus puntos de interés y coordenadas de referencia como en la siguiente imagen.

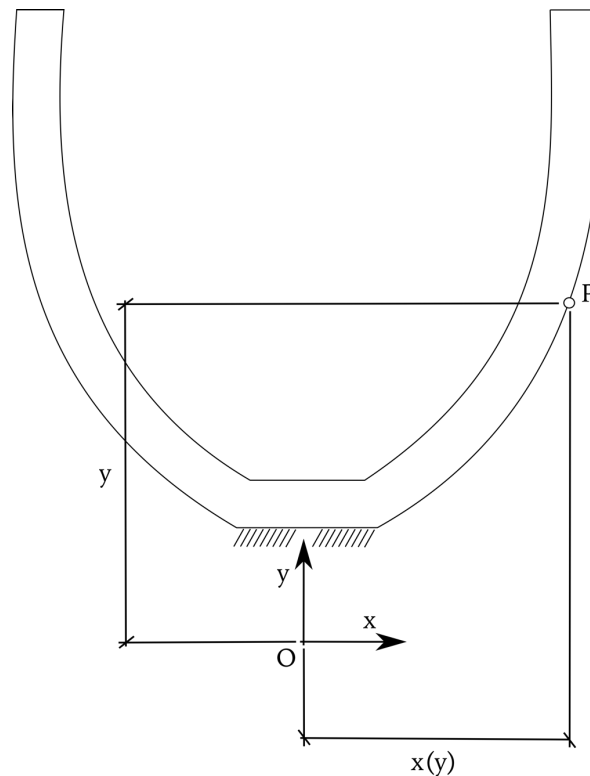


Figura 4-12 *Sólido 1* y sus puntos de interés y coordenadas de referencia.

4.5 Vínculos entre sólidos

Los vínculos entre los sólidos mencionados en los primeros apartados determinan las restricciones que deberán cumplir las coordenadas antes planteadas. A continuación, se presentan las restricciones que existen en el sistema, así como las expresiones matemáticas que las modelan.

Para mantener un estudio sistemático y ordenado, estas quedarán representadas mediante un vector de restricciones que dependerá de las coordenadas generalizadas, el tiempo y la derivada de las coordenadas generalizadas o velocidades generalizadas. En este caso se considerará además una restricción reónoma, es decir, que dependerá del tiempo implícitamente. Esta restricción viene incluida por la acción del actuador. Por otro lado, la dependencia de las velocidades generalizadas es introducida por una restricción no holónoma que genera el par de leva.

4.6 Restricciones

Representando en primer lugar el mecanismo con todos sus pares cinemáticos y coordenadas, se puede observar con claridad el par prismático entre la *barra fija* y el *Sólido 4* y los dos pares de revolución. El primero de ellos entre el *Sólido 4* y el *Sólido 3*, y el segundo de ellos entre el *Sólido 3* y el *Sólido 2*. Por

último, el par más destacable es el par de leva entre el *Sólido 2* y la *barra fija*. Este par se describirá más detalladamente por sus peculiares características.

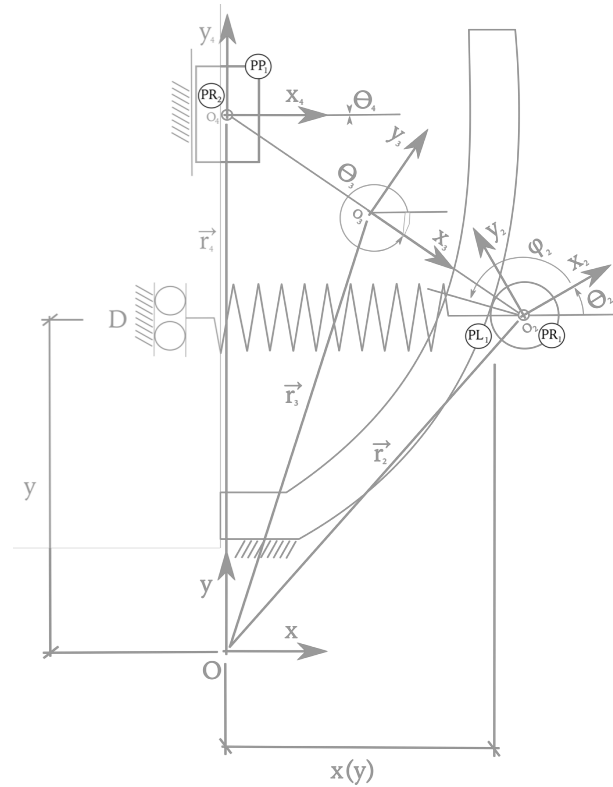


Figura 4-13 Representación de todos los pares y coordenadas de referencia.

4.6.1 Restricciones de par de rotación

Para la descripción cinemática de este par del mecanismo consideraremos el par de revolución entre el *Sólido 3* y *Sólido 4*. De esta forma las coordenadas a utilizar serán:

$$q = [q^{3T} \quad q^{4T}]^T = [x_3 \quad y_3 \quad \theta_3 \quad x_4 \quad y_4 \quad \theta_4]^T \quad 4-49$$

Y de forma análoga para el par de revolución entre el *Sólido 2* y *Sólido 3*:

$$q = [q^{2T} \quad q^3]^T = [x_2 \quad y_2 \quad \theta_2 \quad x_3 \quad y_3 \quad \theta_3]^T \quad 4-50$$

El par de revolución elimina dos grados de libertad, ya que, al fijar el movimiento de ambos sólidos, solo se permite la rotación de uno de ellos respecto al punto geométrico de contacto, que en el caso del par entre *Sólido 2* y *Sólido 3* se denomina *A* y en el caso del par entre el *Sólido 3* y *Sólido 4* se denomina *B*. Al dejar solo un grado de libertad entre estos se debe tener en cuenta que se deben formar dos ecuaciones de restricción.

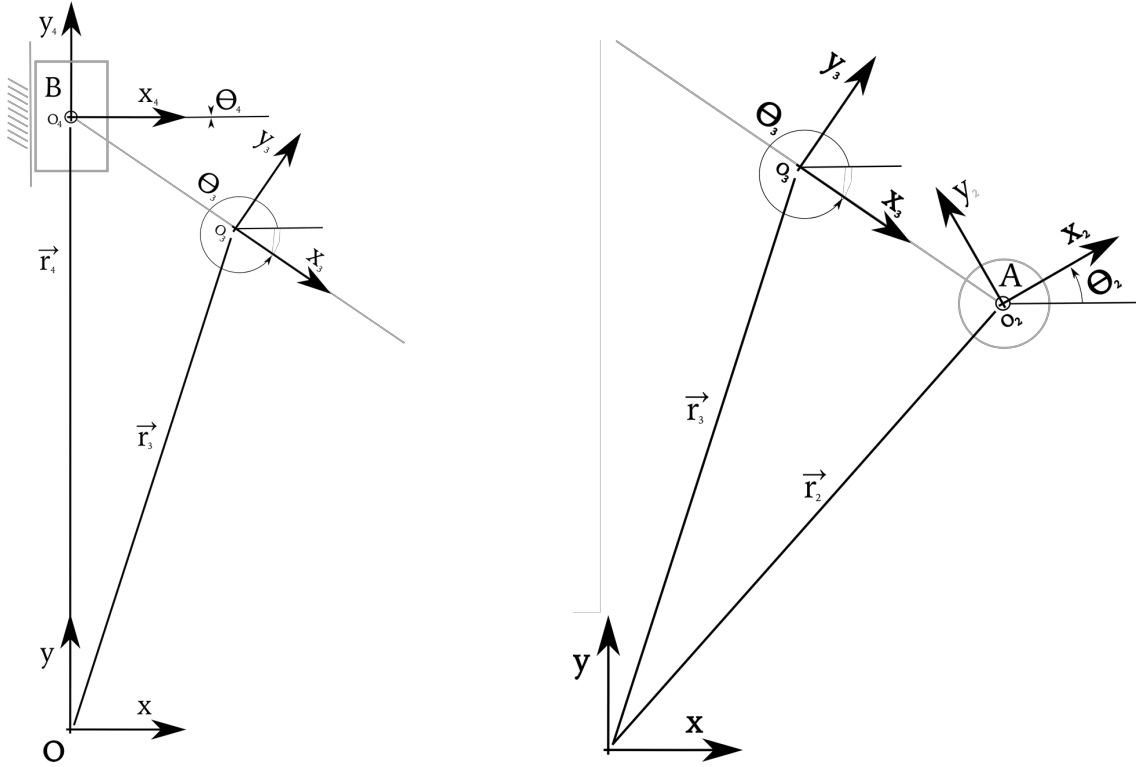


Figura 4-14 Pares de rotación con todos sus coordenadas y parámetros involucrados.

Para entender la ecuación de restricción de un par de rotación, es fácil observar que el punto de contacto A , donde se produce la rotación, debe ser geoméricamente siempre el mismo para ambos sólidos implicados. Por ello se cumple, atendiendo a esta afirmación se tiene que:

$$r^2 + A^2 \bar{u}_A^2 = r^3 + A^3 \bar{u}_A^3 \quad 4-51$$

$$r^2 + A^2 \bar{u}_A^2 - r^3 - A^3 \bar{u}_A^3 = 0 \quad 4-52$$

y de forma desarrollada:

$$\begin{bmatrix} r_x^2 \\ r_y^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_x^3 \\ r_y^3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos\theta^3 & -\sin\theta^3 \\ \sin\theta^3 & \cos\theta^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{l_3}{2} \\ \frac{l_3}{2} \end{bmatrix} \quad 4-53$$

Y de igual forma para el par entre los Sólidos 3 y 4, con el punto de contacto B

$$r^3 + A^3 \bar{u}_B^3 - r^4 - A^4 \bar{u}_B^4 = 0 \quad 4-54$$

$$\begin{bmatrix} r_x^3 \\ r_y^3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos\theta^3 & -\sin\theta^3 \\ \sin\theta^3 & \cos\theta^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{l_3}{2} \\ \frac{l_3}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_x^4 \\ r_y^4 \end{bmatrix} = 0 \quad 4-55$$

Además de las coordenadas, se hacen uso de parámetros que determinan la posición constante del punto A y B . Por lo que, de forma compacta, estas ecuaciones de restricción se pueden representar mediante:

$$\begin{aligned}
C_1^{R1}(q^2, q^3, p_{2,3}^{R1}) &= 0 \\
C_2^{R1}(q^2, q^3, p_{2,3}^{R1}) &= 0 \\
C_1^{R2}(q^3, q^4, p_{3,4}^{R2}) &= 0 \\
C_2^{R2}(q^3, q^4, p_{3,4}^{R2}) &= 0
\end{aligned}
\tag{4-56}$$

Donde C_1^{R1} y C_2^{R1} es la primera y segunda ecuación del primer par de rotación y C_1^{R2} y C_2^{R2} lo análogo al segundo par de rotación entre los *Sólidos 2 y 3*.

Todas estas ecuaciones se agrupan en un vector de restricciones de la siguiente forma.

$$C^{R1}(q^2, q^3, p_{2,3}^{R1}) = \begin{bmatrix} C_1^{R1} \\ C_2^{R1} \end{bmatrix} = 0 \tag{4-57}$$

$$C^{R2}(q^3, q^4, p_{3,4}^{R2}) = \begin{bmatrix} C_1^{R2} \\ C_2^{R2} \end{bmatrix} = 0 \tag{4-58}$$

4.6.2 Restricciones de par prismático

Para la definición de este par, se usará el mismo procedimiento que se ha usado con el par de rotación. Se consideran los sólidos entre los que se da el par prismático, *Sólido 4 y barra fija*.

Es por ello por lo que las coordenadas a utilizar serían las siguientes según la bibliografía (Franco, 2017).

$$q = [q^{1T} \quad q^{4T}]^T = [x_1 \quad y_1 \quad \theta_1 \quad x_4 \quad y_4 \quad \theta_4]^T \tag{4-59}$$

Pero como ya se vio que $q^{1T} = 0$ queda:

$$q = [q^{4T}]^T = [x_4 \quad y_4 \quad \theta_4]^T \tag{4-60}$$

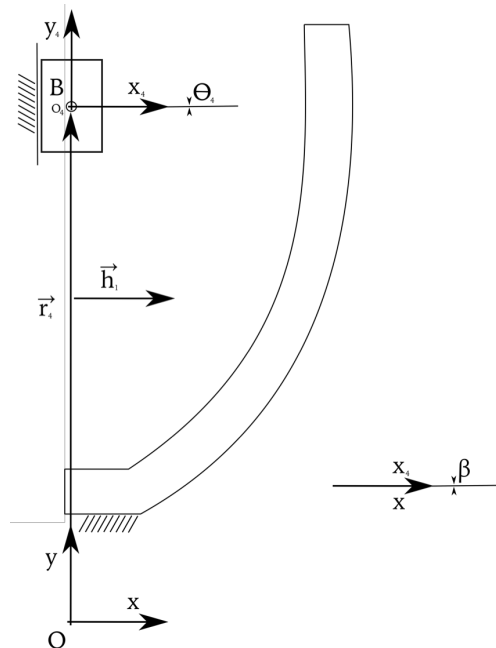


Figura 4-15 Par prismático con todos sus coordenadas y parámetros involucrados.

Al igual que ocurría con el par prismático, este elimina dos grados de libertad, por lo que se buscan dos ecuaciones de restricción. Aunque en este caso no es tan intuitivo como en el caso anterior.

La primera ecuación se obtiene teniendo en cuenta que al ser el par prismático y solo permitirse su traslación, la diferencia de las rotaciones entre ambos sólidos dada por las coordenadas θ_4 y θ_1 siempre será la misma.

$$\theta_4 - \theta_1 = 0 \quad 4-61$$

La segunda restricción se obtiene al imponer que el movimiento de todos los puntos de ambos sólidos sea paralelo siempre a una misma trayectoria. Matemáticamente se obtiene al imponer un producto escalar nulo entre un vector paralelo a esta trayectoria y otro perpendicular a ella. Uniendo el punto B del *Sólido 4* y el punto O del *Sólido 1* se obtiene un vector paralelo a la trayectoria de estos sólidos.

$$r^1 + A^1 \bar{u}_O^1 - r^4 - A^4 \bar{u}_B^4 = 0 \quad 4-62$$

Por otro lado, atendiendo a la figura, el vector perpendicular \vec{h}^i se define como:

$$\vec{h} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad y \quad A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 4-63$$

Así como el producto de estos vectores se obtiene la restricción:

$$(A^1 \vec{h})^T (r^1 + A^1 \bar{u}_O^1 - r^4 - A^4 \bar{u}_B^4) = 0 \quad 4-64$$

Si se trabajan las ecuaciones recién obtenidas se puede llegar a obtener los siguientes valores directamente.

$$\theta_4 = 0 \quad 4-65$$

$$y_4 = 0 \quad 4-66$$

En este punto, para seguir una definición sistemática, se mantendrán las restricciones originales y al igual que se hizo con los pares prismáticos se incluyen en un vector de restricciones tal que:

$$\begin{aligned} C_1^{P1}(q^1, q^4, p_{1,4}^{P1}) &= 0 \\ C_2^{P1}(q^1, q^4, p_{1,4}^{P1}) &= 0 \end{aligned} \quad 4-67$$

Y en forma de vector geométrico:

$$C^{P1}(q^1, q^4, p_{1,4}^{P1}) = \begin{bmatrix} C_1^{P1} \\ C_2^{P1} \end{bmatrix} = 0 \quad 4-68$$

4.6.3 Restricciones de par de leva

Se presentan a continuación las coordenadas que se verán involucradas en las restricciones de par de leva, que, a diferencia de las anteriores, se usan las coordenadas no generalizadas.

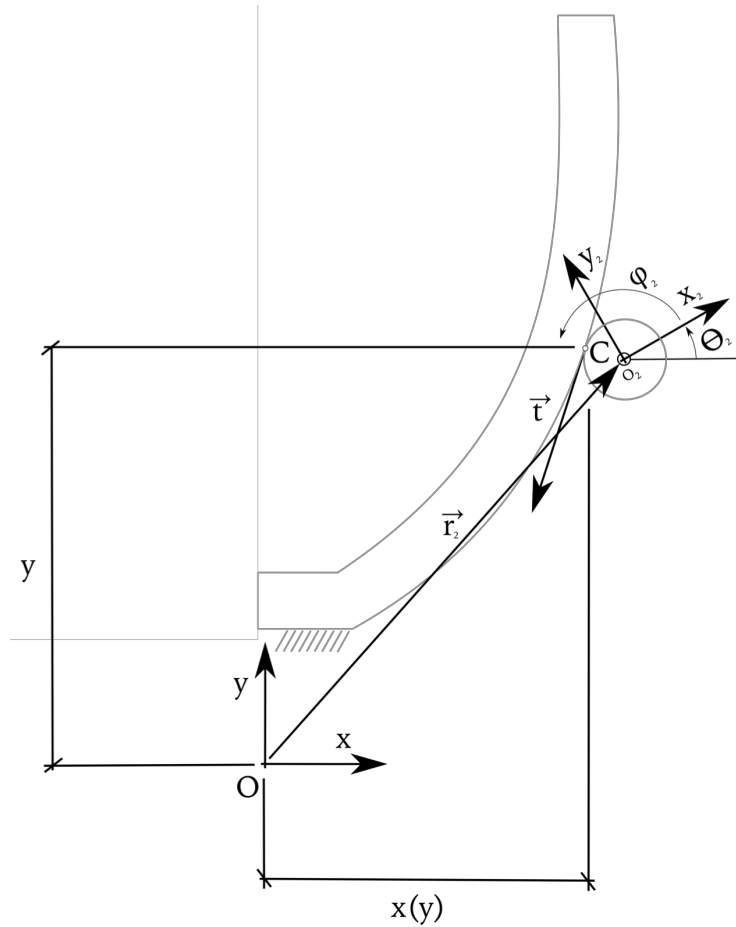


Figura 4-16 Par de leva con todos sus coordenadas y parámetros involucrados.

$$q = [q^{2^T} \quad q^{L^T}] = [x_2 \quad y_2 \quad \theta_2 \quad y \quad \phi^2]^T \quad 4-69$$

Resulta intuitivo pensar que en el punto de contacto C , al igual que ocurría en el par de revolución, debe ser el mismo en todo instante tanto para el *Sólido 1* como para el *Sólido 2*.

$$r^1 + A^1 \bar{u}_c^1 - r^2 - A^2 \bar{u}_c^2 = 0 \quad 4-70$$

de forma desarrollada:

$$\begin{bmatrix} x(y) \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_x^2 \\ r_y^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos \theta^2 & -\sin \theta^2 \\ \sin \theta^2 & \cos \theta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \cos \phi^2 \\ R \sin \phi^2 \end{bmatrix} = 0 \quad 4-71$$

Donde $x(y)$ no es una coordenada más, si no que es una función dependiente de la coordenada y . Teniendo ya el perfil de leva definido, se obtiene $x(y)$ mediante una interpolación.

$$C^{L1}(q^2, q^L, p_{1,2}^{L1}) = \begin{bmatrix} C_1^{L1} \\ C_2^{L1} \end{bmatrix} = 0 \quad 4-72$$

4.6.4 Contacto perpendicular

La siguiente restricción que impone el par de leva es el contacto perpendicular con el perfil de la barra fija. Así se puede definir un vector normalizado que recorre toda la superficie de la leva tangencialmente como:

$$\vec{t}(y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \\ \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} \end{bmatrix} \quad 4-73$$

donde la pendiente m , también conocida a partir de la coordenada y se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$m = \tan\beta = \frac{dx}{dy} \quad 4-74$$

Para imponer que el contacto sea perpendicular, se usa la misma propiedad del producto escalar que en el *par prismático*. Así el vector que es perpendicular en todo momento al vector tangente al punto C es aquel que une este punto con el centro geométrico del *Sólido 2*. De esta forma queda la restricción definida como:

$$r_P^2 * t(y) = \left(\begin{bmatrix} r_x^2 \\ r_y^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta^2 & -\sin\theta^2 \\ \sin\theta^2 & \cos\theta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R\cos\phi^2 \\ R\sin\phi^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \\ \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} \end{bmatrix} \quad 4-75$$

y desarrollando:

$$\begin{aligned} (r_x^2 + \cos\theta^2 R_2 \cos\phi^2 - \sin\theta^2 \sin\phi^2 R_2) \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \\ + \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} (r_y^2 + \sin\theta^2 R_2 \cos\phi^2 - \cos\theta^2 \sin\phi^2 R_2) = 0 \end{aligned} \quad 4-76$$

Unida el vector de restricciones como:

$$C^{L1}(q^2, q^L, p_{1,2}^{L2}) = [C_3^{L1}] = 0 \quad 4-77$$

4.6.5 Rodadura sin deslizamiento

La rodadura sin deslizamiento se impuso en la definición del mecanismo y se puede plantear de varias formas. Por un lado, se puede decir que la velocidad del punto de contacto de ambos sólidos sea coincidente o bien, que la velocidad del punto de contacto del *Sólido 2* con el perfil de la barra fija, sea nulo. Así, haciendo uso de esta segunda opción, se tiene que la proyección de la velocidad sobre la tangente a la curva en el punto de contacto sea nula, de forma que queda:

$$v_P^2 * \vec{t}(y) = 0 \quad 4-78$$

Donde:

$$v_P^2 = \dot{r}_{O_2}^2 + \vec{\omega}^2 \times \overrightarrow{O_2 P} \quad 4-79$$

$$\vec{\omega}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad 4-80$$

$$\overrightarrow{O_2 P} = \begin{bmatrix} R \cos(\phi^2 + \theta_2) \\ R \sin(\phi^2 + \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad 4-81$$

y

$$\dot{r}_{O_2}^2 = \begin{bmatrix} \dot{r}_x^2 \\ \dot{r}_y^2 \end{bmatrix} \quad 4-82$$

Así se introduce en este punto la restricción no holónoma en la que las derivadas de las coordenadas generalizadas o velocidades generalizadas entran en juego. De forma que siendo $\vec{t}(y)$ igual al definido en la restricción de rodadura sin deslizamiento, la restricción queda finalmente como:

$$\dot{r}_y^2 + \dot{\theta}_2 R \sin(\phi^2 + \theta_2) m + \dot{r}_x^2 - \dot{\theta}_2 R \cos(\phi^2 + \theta_2) = 0 \quad 4-83$$

lo que supone la cuarta ecuación que proporciona el par de leva. De forma compacta al igual que para el par prismático y el par de revolución:

$$C_4^{L1}(q^1, q^2, \dot{q}^2, q^L, p_{1,2}^{L1}) = [C_4^{L1}] = 0 \quad 4-84$$

4.6.6 Vector de restricciones

Se presenta aquí el vector de restricciones holónomas al completo.

$$C(q, t) = \begin{bmatrix} C_1^{R1}(q^2, q^3, p_{2,3}^{R1}) \\ C_2^{R1}(q^2, q^3, p_{2,3}^{R1}) \\ C_1^{R2}(q^3, q^4, p_{3,4}^{R2}) \\ C_2^{R2}(q^3, q^4, p_{3,4}^{R2}) \\ C_2^{P1}(q^1, q^4, p_{1,4}^{P1}) \\ C_2^{P1}(q^1, q^4, p_{1,4}^{P1}) \\ C_1^{L1}(q^1, q^4, q^L, p_{1,2}^{L1}) \\ C_2^{L1}(q^1, q^4, q^L, p_{1,2}^{L1}) \\ C_3^{L1}(q^1, q^4, q^L, p_{1,2}^{L1}) \end{bmatrix} = 0 \quad 4-85$$

Así como se obtiene también el vector de restricciones no holónomas, que gracias a que su dependencia de las velocidades es lineal, se puede expresar de la misma forma que las restricciones holónomas tal que:

$$C^{NH}(q, \dot{q}, t) = B(q) \dot{q} \quad 4-86$$

Para concluir el estudio de las restricciones, hay que mencionar que se supone en todas ellas un comportamiento ideal. Pero si hay una de las hipótesis en las que este comportamiento ideal pudiera llegar a duda, es el de rodadura sin deslizamiento. En la realidad siempre existirá un deslizamiento entre el rodillo y el perfil de la leva, por lo que el estudio que estamos realizando no es veraz del todo.

4.7 Grados de libertad del mecanismo

En este punto, ya se tienen definidas todas y cada una de las coordenadas para realizar una correcta descripción del mecanismo y todas aquellas restricciones que deberán cumplir estas coordenadas. Por todo esto, se está en condiciones de determinar los grados de libertad del mecanismo.

Si se considera n como el número total de coordenadas, a m como el número de restricciones que se han definido y a g como la cantidad de grados de libertad del sistema, la definición precisa de número de grados de libertad queda como:

$$g = n - m \quad 4-87$$

Donde sabiendo que se tiene:

$$n = 11 \text{ coordenadas.}$$

$$m = 10 \text{ restricciones.}$$

$$g = 11 - 10 = 1 \text{ grado de libertad.}$$

Como bien es sabido los grados de libertad es una propiedad que nace con el mecanismo, por lo que no depende del número de coordenadas que usemos. Así el grado de libertad en este mecanismo se puede comprobar visualmente paralizando uno de los sólidos del sistema, y viendo como ninguna de los demás es capaz de realizar ningún movimiento.

4.8 Restricciones de movilidad

Teniendo el sistema multicuerpo definido con n coordenadas y m restricciones contando con las holónomas y no holónomas, se pueden introducir g restricciones denominadas de movilidad cuya principal característica es que el tiempo t aparece de forma explícita. De esta forma se introduce el tiempo en el vector de restricciones reónomas haciendo que las demás restricciones esclerónomas dependan implícitamente del tiempo y se puedan calcular las coordenadas y sus derivadas (q, \dot{q}, \ddot{q}) en los sucesivos instantes de tiempo.

Además, la introducción de esta restricción de movilidad tiene una labor matemática. Sin esta restricción el sistema estaría indeterminado ya que se tendrían $n=11$ coordenadas, incógnitas y $m=10$ restricciones, ecuaciones. Con esta nueva restricción se tiene un sistema compatible ya que se tiene el valor en cualquier instante de tiempo de una de las coordenadas, la que se denomina dependiente q^{dep} , que introduce la variable tiempo en las demás coordenadas que se denominan q^{ind} .

Físicamente las restricciones de movilidad son una forma de introducir los actuadores, ya que se pueden incluir tantos como grados de libertad tenga el sistema. En este caso se introduce la ecuación que modela el movimiento de la coordenada y_4 , de forma que:

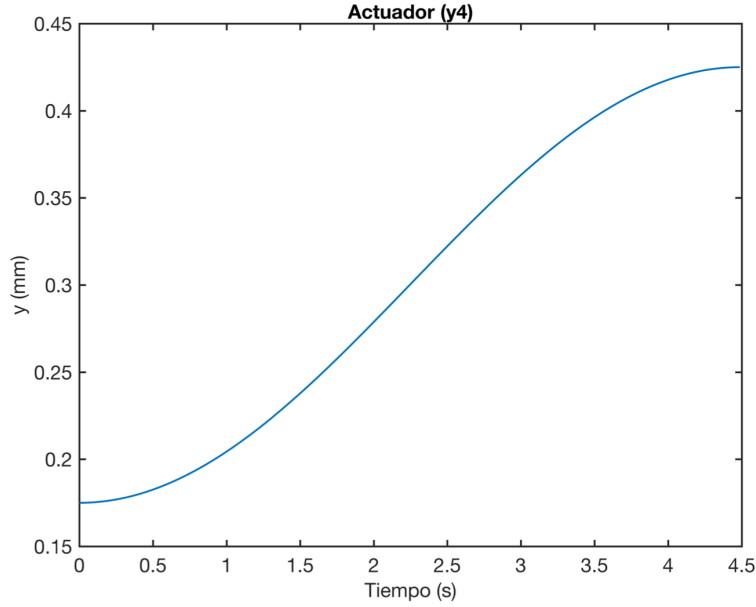


Figura 4-17 Trayectoria del *Sólido 4*, introducida por el actuador.

Curva modelada por la ecuación:

$$y_4 = L \frac{1 - \cos(\omega t)}{2} \quad 4-88$$

Con $t_i = 0$ y $t_f = \frac{\pi}{\omega}$ y donde L es la altura final de y_4 quedando la restricción de movimiento como sigue:

$$C^{mov}(q, t) = y_4 - L \frac{1 - \cos(\omega t)}{2} \quad 4-89$$

Donde L es la altura de la leva, que será el recorrido de la coordenada y_4 y ω . De esta forma incluyendo en el vector de restricciones las restricciones no holónomas y de movimiento queda como:

$$C(q, \dot{q}, t) = \begin{bmatrix} C(q, t) \\ C^{NH}(q, \dot{q}, t) \\ C^{mov}(q, t) \end{bmatrix} = 0 \quad 4-90$$

4.9 Derivadas de las ecuaciones de restricción respecto al tiempo

Una vez definido el vector de restricciones, cabe determinar en este punto su derivada respecto al tiempo. Esas expresiones serán de utilidad en los siguientes capítulos para determinar las ecuaciones del movimiento del sistema. Para obtener estas expresiones se aplica simplemente la regla de la cadena como:

$$\dot{C}(q, \dot{q}, t) = \frac{dC(q)}{dt} = \frac{\partial C(q)}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial C(q)}{\partial t} = C_q \dot{q} + C_t = 0 \quad 4-91$$

obteniendo de esta forma la derivada primera en función de la derivada primera de las coordenadas generalizadas. Además, se tiene C_q , la matriz jacobina de las restricciones y C_t que determina la derivada parcial de las restricciones respecto al tiempo. De igual forma, la derivada segunda queda como:

es que no se pueden obtener el valor de todas y cada una de las coordenadas de los sólidos. Es decir, no se puede saber de forma directa las posiciones, velocidades y aceleraciones y década uno de los sólidos.

4.10.1 Coordenadas y restricciones alternativas

Si se representa este sistema simplificado queda como:

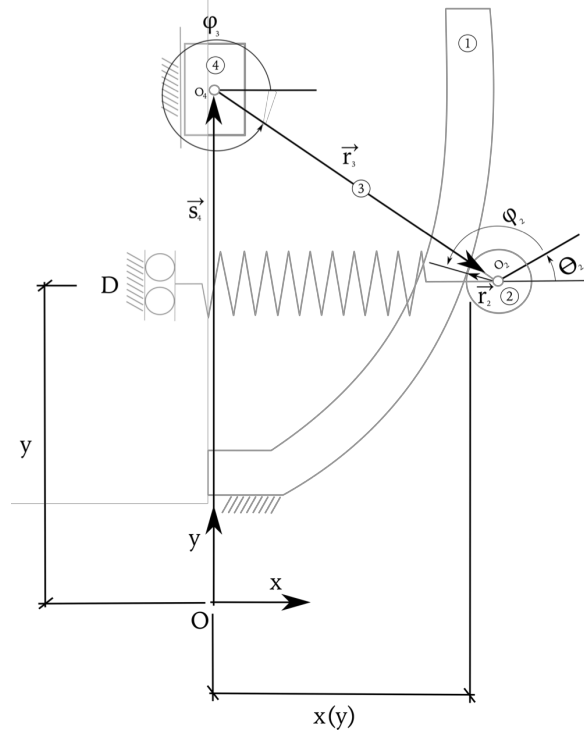


Figura 4-18 Planteamiento alternativo del sistema.

Atendiendo a las ecuaciones de lazo, se puede definir:

$$s_4 + r_3 + r_2 = r_1 \quad 4-95$$

Y de forma desarrollada:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ s_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_t \cos \phi_3 \\ l_t \sin \phi_3 \end{bmatrix} + r_2(\theta_2, \phi_2) = \begin{bmatrix} x(y) \\ y \end{bmatrix} \quad 4-96$$

Introduciendo ahora las restricciones causadas por el contacto perpendicular del rodillo hacia la leva y rodadura sin deslizamiento se tiene:

$$r_2 * \vec{t}(y) = 0 \quad 4-97$$

$$v_P^2 * \vec{t}(y) = 0 \quad 4-98$$

Estas dos últimas corresponden a las mismas restricciones que imponía el método usado anteriormente. De esta forma el sistema queda definido totalmente, mediante cinco coordenadas;

$$q^T = [s_4 \quad \phi_3 \quad \phi_2 \quad \theta_2 \quad y] \quad 4-99$$

Y las correspondientes cuatro ecuaciones de restricción planteadas. Se tiene así el grado de libertad esperado.

5 DINÁMICA DEL SISTEMA

Everything is energy and that's all there is to it.
- Albert Einstein -

En el siguiente capítulo se tratan las formulaciones matemáticas que modelan el movimiento del mecanismo de leva bajo estudio para describir su comportamiento dinámico, movimiento y las fuerzas que se ven involucradas. Estas formulaciones, a las que se llegará siguiendo también una filosofía sistemática, serán útiles para la simulación computacional del movimiento del mecanismo y la evaluación de su diseño.

Para llegar al modelo matemático, ecuaciones de movimiento del sistema, se partirá de las ecuaciones de Newton-Euler, basadas en el principio de D'Alembert y formulaciones de LaGrange.

Así, una vez entendidas las magnitudes que se usarán y las ecuaciones que modelan el mecanismo, se tiene que dependiendo de las magnitudes de las que se partan y se busquen, existen dos estudios diferentes. Por un lado, si se pretende conocer el movimiento del sistema, el estudio se denominará, *dinámica directa*. En este lo que se busca son los movimientos que provocan las fuerzas conocidas. En el otro caso, *dinámica inversa*, es el que adoptará en este estudio. Las fuerzas son desconocidas y se buscan sus magnitudes a partir de la posición, velocidad y aceleración conocidas de los sólidos.

5.1 Ecuación diferencial-algebraica de equilibrio del sistema.

Partiendo de las ecuaciones de Newton-Euler, y aplicando las formulaciones de LaGrange se llega a la ecuación de equilibrio del sistema (Shabana, 1998). De forma simplificada, y aplicada al sistema en cuestión:

$$M(q)\ddot{q} + D^T(q)\lambda = Q_{apl}(q, \dot{q}) + Q_v(q, \dot{q}) + A_\tau(q)\tau \quad 5-1$$

Donde M es la matriz de masas, Q_{apl} es la suma de todas las fuerzas generalizadas aplicadas al sistema, Q_v es el vector de fuerzas generalizadas cuadráticas en velocidades y $A_\tau(q)\tau$ es el vector de fuerzas generalizadas resultado de las acciones que actúan sobre el mecanismo, τ , que, en el caso del sistema, se refiere a la fuerza del actuador, el único grado de libertad que debe ser cubierto por una acción externa, por lo que se cumple:

$$\tau = F \quad 5-2$$

Siendo F la fuerza que se pretende obtener de todo el estudio para determinar si se cumple un input de fuerza constante y de qué forma influyen cada uno de los parámetros en esta fuerza.

Así en este mismo término se tiene $A_\tau(q)$ que se obtiene de la matriz jacobiana $L(q)$. Y que para este sistema se tiene:

$$A_\tau(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad 5-3$$

Por otro lado, se tiene el producto $D^T(q)\lambda$, donde λ son los multiplicadores de Lagrange (Franco, 2017) y marcan las fuerzas de reacción entre cada uno de los sólidos en cada uno de los pares.

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_x^0 \\ \lambda_y^0 \\ \lambda_x^{R1} \\ \lambda_y^{R1} \\ \lambda_x^{R2} \\ \lambda_y^{R2} \\ \lambda_x^{P1} \\ \lambda_y^{P1} \\ \lambda_x^{L1} \\ \lambda_y^{L1} \\ \lambda_N^{L1} \\ \lambda_T^{L1} \end{bmatrix} \quad 5-4$$

Así entendiendo cada uno de estos términos y sabiendo que $\tau = F$ es el valor de fuerza que se pretende obtener el sistema queda tal que:

$$[-D^T(q), A_\tau(q)] \begin{bmatrix} \lambda \\ \tau \end{bmatrix} = M(q)\ddot{q} - Q_{apl}(q, \dot{q}) - Q_v(q, \dot{q}) \quad 5-5$$

Y despejando:

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ \tau \end{bmatrix} = ([-D^T(q), A_\tau(q)])^{-1} (M(q)\ddot{q} - Q_{apl}(q, \dot{q}) - Q_v(q, \dot{q})) \quad 5-6$$

Así, a continuación, se definen y desarrollan cada uno de los términos de este sistema a resolver.

5.2 Fuerzas aplicadas

5.2.1 Fuerzas elástica

La fuerza elástica viene introducida íntegramente por el muelle. Para definirla se define el siguiente principio energético teniendo en cuenta el esquema que se presenta a continuación y las características del elemento elástico con las que estamos trabajando.

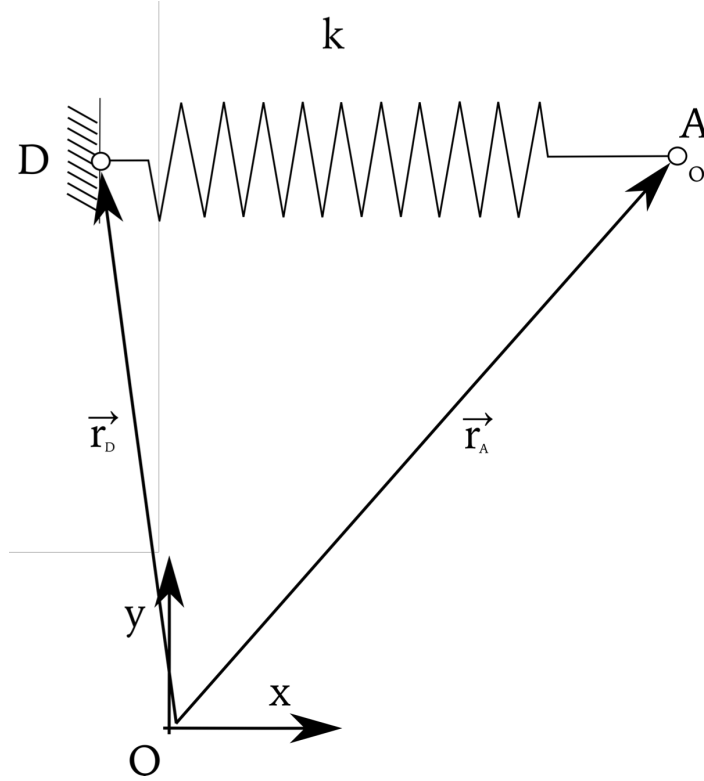


Figura 5-1 Par prismático con todos sus coordenadas y parámetros involucrados.

$$U_{def} = \frac{1}{2} k 2(x - x_0)^2 \quad 5-7$$

$$Q_{muelle} = - \left(\frac{\partial U_{def}}{\partial q} \right)^T = -2k(x - x_0) \quad 5-8$$

Donde:

$$x = |r_{DA}| \quad 5-9$$

Y l_0 es la longitud inicial definida en las características del muelle. Por otro lado, se tiene que, haciendo las pertinentes simplificaciones y normalización:

$$r_{DA} = r^2 + A^2 \bar{u}_A^2 - r^1 - A^1 \bar{u}_D^1 = r^2 - \bar{u}_D^1 = r^2 - \bar{u}_D^1 \quad 5-10$$

$$l = |r_{DA}| = [r_{DA}^T r_{DA}]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(r_x^2)^2 + (r_y^2 - y)^2} \quad 5-11$$

Donde geométricamente se deduce que r_y^2 e y tendrán el mismo valor en todo momento por lo que l queda como:

$$l = r_x^2 \quad 5-12$$

Teniendo así que el muelle se deformará tanto como el *Sólido 2* se desplace horizontalmente.

5.2.2 Fuerzas gravitatorias

La fuerza gravitatoria viene introducida por el propio peso de los sólidos. Así, esta solo tendrá influencia verticalmente como se podrá ver en las siguientes expresiones.

$$Q_{gravitatoria} = \begin{bmatrix} 0 \\ m_1 g \\ m_1 (u_G \times g) \\ 0 \\ m_2 g \\ m_2 (u_G \times g) \\ 0 \\ m_3 g \\ m_3 (u_G \times g) \\ 0 \\ m_4 g \\ m_4 (u_G \times g) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 5-13$$

Donde m_1, m_2, m_3 y m_4 son las masas de cada uno de los sólidos ya conocidas y u_G representa la distancia del centro de gravedad al centro geométrico del sólido, que para este sistema en todos los casos se cumple;

$$u_G^i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ para } i = 1, 2, 3 \text{ y } 4. \quad 5-14$$

Y por otro lado se define g , como la gravedad tal que:

$$g = \begin{bmatrix} 0 \\ -9.81 \end{bmatrix} \quad 5-15$$

5.2.3 Fuerzas cuadrática en velocidad

La fuerza cuadrática en velocidad representa la fuerza centrífuga a la que son sometidos cada uno de los sólidos en su centro geométrico, donde se sitúa el sistema de referencia local. Teniendo en cuenta la expresión de la fuerza centrífuga y los valores de u_G^i antes expuestos

$$Q_v = \begin{bmatrix} [m_1 \dot{\theta}_1^2 (A^1 \times u_G^1)]_{2 \times 1} \\ 0 \\ [m_2 \dot{\theta}_2^2 (A^2 \times u_G^2)]_{2 \times 1} \\ 0 \\ [m_3 \dot{\theta}_3^2 (A^3 \times u_G^3)]_{2 \times 1} \\ 0 \\ [m_4 \dot{\theta}_4^2 (A^4 \times u_G^4)]_{2 \times 1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [0]_{14 \times 1} \quad 5-16$$

Donde A^i es la matriz de transformación o de giro de cada uno de los sólidos.

$$A^i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix} \quad 5-17$$

5.2.4 Fuerza de rodadura

La fuerza de rodadura, aunque es una de las fuerzas que menos influencia tiene un tratamiento diferente a las demás fuerzas generalizadas ya que esta depende a su vez de uno de los multiplicadores de LaGrange los cuales son uno de los resultados. Así la fuerza de rodadura se define tal que:

$$Q_f = G * \mu_R * N \quad 5-18$$

Así G se define como el vector resultante de la descomposición de fuerzas en el sólido 2 que se muestra en la figura.

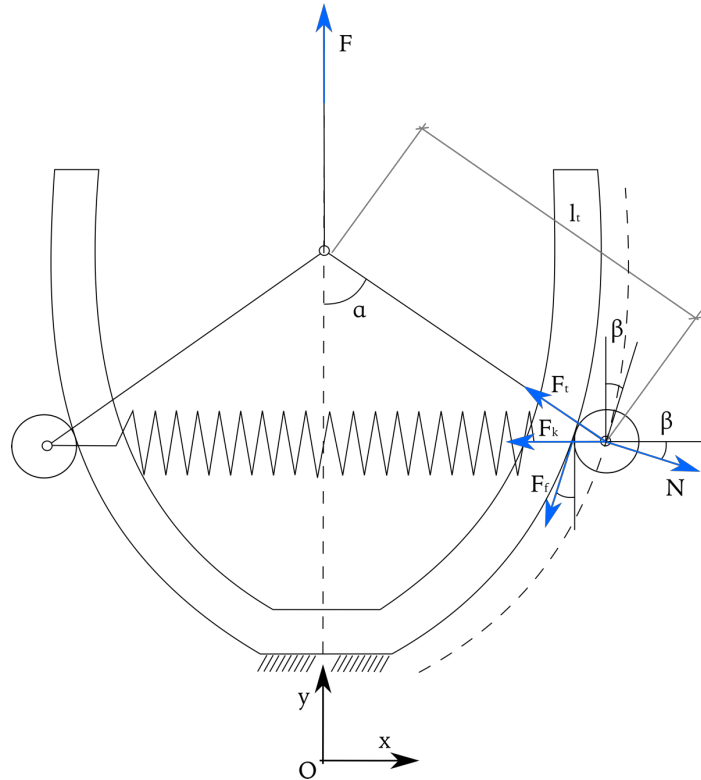


Figura 5-2 Descomposición de fuerzas en *Sólido 2*.

Centrando solo la atención en la fuerza F_f y como esta computa en cada una de las descomposiciones, se tiene:

$$\text{eje } x: F_f * \sin\beta = \sin\beta * \mu_R * N \quad 5-19$$

$$\text{eje } y: F_f * \cos\beta = \cos\beta * \mu_R * N \quad 5-20$$

$$\text{giro: } F_f * R_2 = R * \mu_R * N \quad 5-21$$

Se deduce por tanto que:

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sin\beta \\ \cos\beta \\ R \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 5-22$$

Por otro lado, la normal N se obtiene a partir del vector de multiplicadores de LaGrange antes definido, λ . Si se toma esta componente se tiene

$$N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_x^{L1} * \cos \\ \lambda_y^{L1} * \sin \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \quad 5-23$$

5.3 Arreglo ecuación diferencial-algebraica de equilibrio del sistema

Como se ha podido comprobar en estos apartados se tiene que:

$$Q_{apl}(q, \dot{q}, \lambda) = Q_{muelle} + Q_{grav} + Q_v + Q_{rodadura} \quad 5-24$$

Y todo ello implementado en la ecuación diferencial-algebraica de equilibrio quedaría tal que:

$$[-D^T(q), A_\tau(q)] \begin{bmatrix} \lambda \\ \tau \end{bmatrix} = M(q)\ddot{q} - Q_v(q, \dot{q}) - Q_{muelle} - Q_{grav} - Q_{rodadura} \quad 5-25$$

La expresión general de la fuerza generalizada de rodadura quedaría dependiente de multiplicadores de LaGrange los cuales son incógnita del problema que se pretende resolver. Por ello se lleva a cabo el siguiente cambio, quedando el sistema ordenado en cuanto a variables se refiere.

$$[-D^T(q) - Q_{rodadura}, A_\tau(q)] \begin{bmatrix} \lambda \\ \tau \end{bmatrix} = M(q)\ddot{q} - Q_v(q, \dot{q}) - Q_{muelle} - Q_{grav} \quad 5-26$$

De esta forma queda el sistema de nuevo preparado para su resolución a falta definir las expresiones con las que se obtendrán las posiciones, velocidades y aceleraciones de las cuales son dependientes las expresiones que se acaban de presentar.

5.4 Coordenadas y sus derivadas respecto al tiempo.

La dinámica inversa se define como el cálculo de fuerzas y momentos necesarios para cumplir las trayectorias deseadas de las variables, y sus derivadas en función del tiempo, que determinaran la posición de cada uno de los sólidos del sistema. Aunque no se considera la verdadera simulación dinámica, sí que permite obtener el valor de todas las variables del problema algebraicamente, con solo una integración numérica, para obtener la posición del sistema.

En este caso la acción de los actuadores viene introducida mediante la restricción de movimiento presentada anteriormente como:

$$C_{mov}(q, t) = y_4 - L \frac{1 - \cos(\omega t)}{2} = 0 \quad 5-27$$

Gracias a esta restricción adicional, el sistema queda con el mismo número de restricciones, ecuaciones, que de coordenadas o incógnitas. Por lo tanto, con el siguiente sistema

$$C(q, \dot{q}, t) = \begin{bmatrix} C(q, t) \\ C^{NH}(q, \dot{q}, t) \\ C^{mov}(q, t) \end{bmatrix} = 0 \quad 5-28$$

dado que se tienen 14 ecuaciones y 14 incógnitas parece tentador obtener el valor de todas las coordenadas aplicando el método de Newton Rawson para ecuaciones no lineales, obtener el valor de todas las coordenadas q

$$q = [x_2 \quad y_2 \quad \theta_2 \quad x_3 \quad y_3 \quad \theta_3 \quad x_4 \quad y_4 \quad \theta_4 \quad \phi^2 \quad x] \quad 5-29$$

y a partir de ellas el valor de sus derivadas primera y segunda, \dot{q} y \ddot{q} , necesarias para solventar las ecuaciones de equilibrio del sistema.

Pero como se puede ver, una de las ecuaciones es una restricción no holónoma, por lo que depende además de la derivada primera de las coordenadas generalizadas y no generalizadas, dejando el sistema con 14 ecuaciones, pero con 28 incógnitas.

Para saltar esta inconveniencia se separan las restricciones holónomas y no holónomas y se derivan respecto al tiempo las holónomas de la siguiente forma:

$$C_q(q)\dot{q} = 0 \quad 5-30$$

$$C^{NH}(q, \dot{q}) = B(q)\dot{q} = 0 \quad 5-31$$

Así, además se pueden separar todas las restricciones en coordenadas dependientes e independientes, siendo la coordenada independiente y_4 , por la restricción de movimiento.

$$q_{dep} = [x_2 \ y_2 \ \theta_2 \ x_3 \ y_3 \ \theta_3 \ x_4 \ \theta_4 \ \phi^2 \ x] \quad 5-32$$

$$q_{ind} = [y_4] \quad 5-33$$

Y realizando las mismas operaciones que en las ecuaciones 5-42 y 5-43 pero esta vez separando las coordenadas dependientes e independientes, se tiene:

$$C_{q_d}(q)\dot{q}_d + C_{q_i}(q)\dot{q}_i = 0 \quad 5-34$$

$$B_d(q)\dot{q}_d + B_i(q)\dot{q}_i = 0 \quad 5-35$$

Y uniendo ambas ecuaciones matricialmente, se llega a:

$$\begin{bmatrix} C_{q_d}(q) \\ B_d(q) \end{bmatrix} \dot{q}_d = - \begin{bmatrix} C_{q_i}(q) \\ B_i(q) \end{bmatrix} \dot{q}_i \quad 5-36$$

que cambiando la nomenclatura queda como:

$$D_d(q)\dot{q}_d = -D_i(q)\dot{q}_i \quad 5-37$$

Teniendo esto, si se despeja la derivada respecto al tiempo de las coordenadas dependientes, y se tiene en cuenta la dependencia respecto al tiempo de la coordenada independiente, se llega a:

$$\dot{q}_d = -(D_d(q), t)^{-1} D_i(q, t) \dot{q}_i(t) \quad 5-38$$

Teniendo la ecuación diferencial primer orden ODE, se puede integrar obteniendo así el valor de las coordenadas dependientes, y sumando el valor de la coordenada independiente se obtiene el valor de todas y cada una de las coordenadas generalizadas y no generalizadas.

5.4.1 Estabilización de Baumgarte

El verdadero éxito del algoritmo computacional que se usara para resolver estas ecuaciones depende de la convergencia del método de Newton-Raphson.

La solución de la derivada de las ecuaciones de restricción puede ir acumulando un error iteración tras iteración, que puede derivar en un aumento exponencial de este, siendo así una solución inestable.

Baumgarte soluciona esta inestabilidad modificando la ecuación 5-48 mediante

$$C(\dot{q}) + \epsilon C(q) = 0 \quad 5-39$$

con $\alpha > 0$.

Lo que combinando la ecuación anterior con la modificación de Baumgarte, se llega al sistema a integrar

$$\dot{q}_d = - \left(\begin{bmatrix} C_{q_d}(q_d, t) \\ B_d(q_d, t) \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} C_{q_i}(q_i, t) \dot{q}_i(t) + \alpha_e C(q_d, t) \\ B_i(q_d, t) \dot{q}_i(t) \end{bmatrix} \quad 5-40$$

con las condiciones iniciales

$$q_{d0} = q_d(t_0) \quad 5-41$$

Esto hace que se obtengan resultados precisos, y aunque no hay un método determinado para elegir el parámetro α , se suelen elegir cuanto mayor, mejor resultado se obtiene con el precio de un coste computacional mayor.

5.4.2 Problema de velocidad

Una vez se tiene el valor de las coordenadas generalizadas y no generalizadas q se puede obtener el valor de velocidad, derivada primera de las coordenadas generalizadas.

$$\dot{q} = \dot{q}(q, t) \quad 5-42$$

Par ello se utilizarán las expresiones definidas en los capítulos anteriores:

$$C_q \dot{q} + C_t = 0 \quad 5-43$$

Y despejando la derivada primera respecto al tiempo de las coordenadas, se tiene:

$$\dot{q} = -C_t/C_q \quad 5-44$$

Obteniendo así el valor de las velocidades de cada uno de los sólidos.

$$v = [\dot{x}_2 \quad \dot{y}_2 \quad \dot{\theta}_2 \quad \dot{x}_3 \quad \dot{y}_3 \quad \dot{\theta}_3 \quad \dot{x}_4 \quad \dot{y}_4 \quad \dot{\theta}_4 \quad \dot{\phi}^2 \quad \dot{x}] \quad 5-45$$

5.4.3 Problema de aceleraciones

Llegado este punto, una vez que se tiene el valor de las coordenadas y su derivada primera se puede obtener la derivada segunda de las coordenadas ya que se cumple:

$$\ddot{q} = \ddot{q}(q, \dot{q}, t) \quad 5-46$$

Usando, igual que para el caso de la velocidad, una de las ecuaciones usadas en el *Capítulo 3*

$$C_q \ddot{q} = -\dot{C}_q \dot{q} - \dot{C}_t \quad 5-47$$

Y despejando la variable de interés:

$$\ddot{q} = (C_q^{-1}) * (-\dot{C}_q \dot{q} - \dot{C}_t) \quad 5-48$$

Con esta última expresión se está en condiciones de resolver la dinámica inversa del mecanismo.

6 RESOLUCIÓN NUMÉRICA

*Mathematics is no more computation than typing
is literature.*

- John Allen Paulos -

En el presente capítulo, se presentará la implementación de todas las expresiones de los capítulos anteriores en la herramienta de programación Matlab para simular computacionalmente la dinámica del mecanismo.

6.1 Definición del mecanismo

En primer lugar, para entrar en el método recursivo de la dinámica inversa antes presentado, se deben determinar los parámetros, coordenadas y vínculos que introducen los sólidos y pares del mecanismo.

6.1.1 Coordenadas simbólicas

Se definen las coordenadas que se usarán en las restricciones del mecanismo. Además, se diferencian entre dependientes e independientes para las operaciones necesarias en los demás apartados.

```
clear all
clc

global Mec

%----- GRADOS DEL POLINOMIO INTERPOLADOR

Mec.grado = 50;

%----- COORDENADAS DEL SISTEMA

syms x1 y1 theta1 x2 y2 theta2 x3 y3 theta3 x4 y4 theta4 phi y x t long omega radio
q = [x1 y1 theta1 x2 y2 theta2 x3 y3 theta3 x4 y4 theta4 y phi];
qdep = [x1 y1 theta1 x2 y2 theta2 x3 y3 theta3 x4 theta4 y phi];
qind = [y4];

syms dx1 dy1 dtheta1 dx2 dy2 dtheta2 dx3 dy3 dtheta3 dx4 dy4 dtheta4 dy dphi
v = [dx1 dy1 dtheta1 dx2 dy2 dtheta2 dx3 dy3 dtheta3 dx4 dy4 dtheta4 dy dphi];
vdep = [dx1 dy1 dtheta1 dx2 dy2 dtheta2 dx3 dy3 dtheta3 dx4 dtheta4 dy dphi];
vind = [dy4];

para = [long omega radio];
```

6.1.2 Interpolación de la superficie de la leva

Antes de continuar es necesario definir la superficie de la leva en función de las coordenadas del sistema. Así se lleva a cabo una interpolación a partir de los documentos .txt obtenidos a partir de (Javier López-Martínez, 2017) para definir la dependencia $x(y)$ quedando como:

$$x = ppy^4 + ppy^3 + ppy^2 + ppy + pp \quad 6-1$$

de un grado a elegir por el usuario del programa, que deberá sacrificar una mejor solución del problema para obtener menor tiempo computacional, bajando el grado de este. Por otro lado, se obtiene la pendiente de la leva, necesaria en los siguientes apartados $m(y)$, así:

$$m = \frac{dx}{dy} \quad 6-2$$

```
%----- INTERPOLACION DE SUPERFICIE DE LEVA

load xx.txt ;
xreal=xx(:)*0.001;
load yy.txt;
yreal=yy(:)*0.001;

yreal = yreal - yreal(1);

pp = polyfit(yreal(:),xreal(:),Mec.grado);

xinter = 0;
for i=1:(Mec.grado+1)

    xinter = xinter + pp(i) * q(13).^(Mec.grado+1-i);

end
minter = jacobian(xinter,q(13));
```

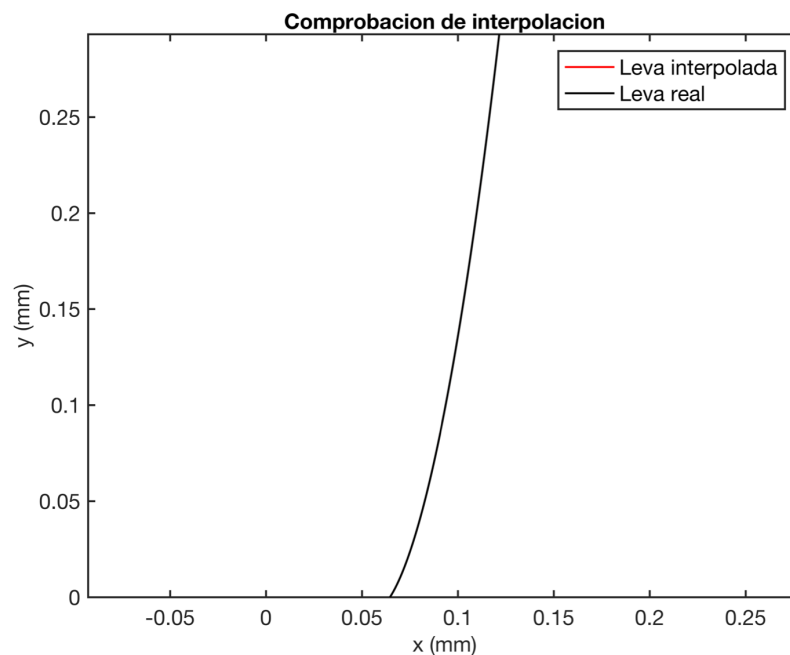


Figura 6-1 Interpolación de la superficie de la leva.

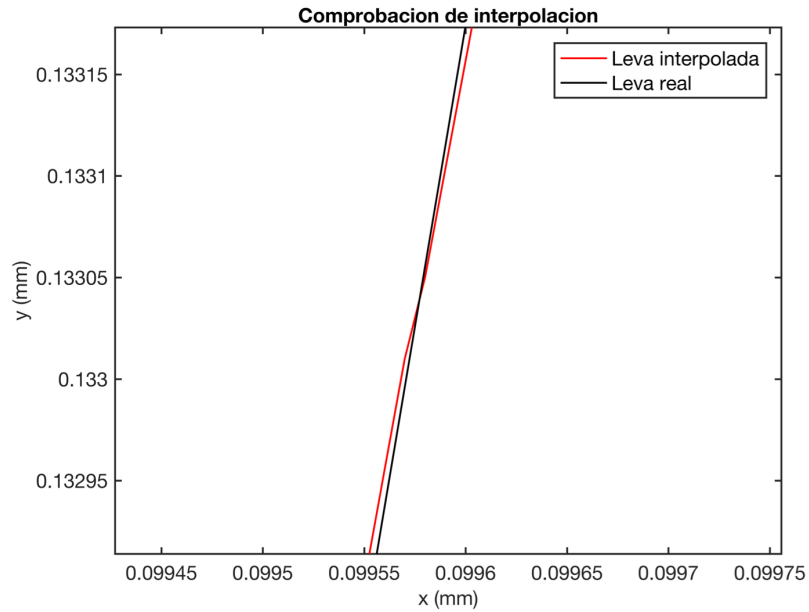


Figura 6-2 Precisión de la interpolación de la superficie de la leva.

6.1.3 Pares cinemáticos

A continuación, se definen las ecuaciones que definirán los pares cinemáticos. Estas ecuaciones se irán introducción en un vector de restricciones de la forma:

$$C(q, \dot{q}, t) = \begin{bmatrix} C(q, t) \\ C^{NH}(q, \dot{q}, t) \\ C^{mov}(q, t) \end{bmatrix} = 0 \quad 6-3$$

6.1.3.1 Barra fija.

```
% BARRA FIJA

CPares(1) = q(1);
CPares(2) = q(2);
CPares(3) = q(3);
```

6.1.3.2 Rótula primera

```
% ROTULA 1

ui = [0 0]';
uj = [long/2 0]';

Ar11 = [cos(q(6)) sin(q(6)); -sin(q(6)) cos(q(6))];
Ar12 = [cos(q(9)) sin(q(9)); -sin(q(9)) cos(q(9))];

Rr1 = q(4:5)' + Ar11 * ui - q(7:8)' - Ar12 * uj;

CPares(4) = Rr1(1)';
CPares(5) = Rr1(2)';
```

6.1.3.3 Rótula segunda

```
% ROTULA 2

ui = [-long/2 0]';
uj = [0 0]';

Ai = [cos(q(9)) sin(q(9)); -sin(q(9)) cos(q(9))];
Aj = [cos(q(12)) sin(q(12)); -sin(q(12)) cos(q(12))];

Rr2 = q(7:8)' + Ai'*ui - q(10:11)' - Aj'*uj;

CPares(6) = Rr2(1)';
CPares(7) = Rr2(2)';
```

6.1.3.4 Par prismático

```
% PRISMATICO

ui = [0 0]';
uj = [0 0]';
hi = [1 0]';

Ai = [cos(q(3)) -sin(q(3)); sin(q(3)) cos(q(3))];
Aj = [cos(q(12)) sin(q(12)); -sin(q(12)) cos(q(12))];

CPares(8) = q(3) - q(12);
CPares(9) = ((Ai*hi)'*(q(1:2)' + Ai'*ui - q(10:11)' - Aj'*uj))';
```

6.1.3.5 Leva

```
% LEVA

ui = [x q(13)]';
uj = [radio*cos(q(14)) radio*sin(q(14))];

Ai = [cos(q(3)) sin(q(3)); -sin(q(3)) cos(q(3))];
Aj = [cos(q(6)) sin(q(6)); -sin(q(6)) cos(q(6))];

Rl(1:2,1) = (q(1:2)' + Ai'*ui - q(4:5)' - Aj'*uj)';

CPares(10) = Rl(1);
CPares(11) = Rl(2);
```

6.1.3.6 Rodadura sin deslizamiento

```
% RODADURA SIN DESLIZAMIENTO

uj = [radio*cos(q(14)) radio*sin(q(14))];
Aj = [cos(q(6)) sin(q(6)); -sin(q(6)) cos(q(6))];

tang = [minter; 1]/(sqrt(1+minter^2));

CPares(12) = ((Aj'*uj)')*tang;
```

6.1.3.7 Restricción no holónoma

```
% RESTRICCION NO HOLONOMA

ujvectorial = [-radio*sin(q(14)+q(6)) radio*cos(q(14)+q(6))];
```

```
CNH = (v(4:5)+(dtheta2'*ujvectorial'))*tang;
```

6.1.4 Jacobianos

Como bien se sabe de los capítulos anteriores, se necesitan los jacobianos de los pares que se acaban de definir, así como de las restricciones no holónomas en función de las coordenadas dependientes e independientes.

```
Cqdep=jacobian(CPares,qdep);
Bdep=jacobian(CNH,dqdep);

Cqind=jacobian(CPares,qind);
Bind=jacobian(CNH,dqind);

Cq = jacobian(CPares,q);
NHNH = jacobian(CNH,v);

Cqmov = [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0];

D = [Cq ;NHNH;Cqmov];
Dpunto = jacobian(D*v',q);
```

6.1.5 Generación de funciones

Una vez se tienen los jacobianos y todo lo necesario para la simulación dinámica se generan las funciones que albergarán a estas ecuaciones y que podrán ser usadas en cualquier momento de la simulación gracias a la función de Matlab matlabFunction.

```
matlabFunction(CPares,'File','MatCPares','Vars',{t,q,para});
matlabFunction(Cqdep,'File','MatCqdep','Vars',{t,q,para});
matlabFunction(Bdep,'File','MatBdep','Vars',{t,q,para});
matlabFunction(Cqind,'File','MatCqind','Vars',{t,q,para});
matlabFunction(Bind,'File','MatBind','Vars',{t,q,para});

matlabFunction(D,'File','MatD','Vars',{t,q,para});
matlabFunction(Dpunto,'File','MatDpunto','Vars',{t,q,v,para});
```

6.2 Simulación dinámica

6.2.1 Parámetros del Sistema

Antes de comenzar con la integración dinámica, se definen todos los parámetros que tendrán su influencia en la simulación.

```
Mec.grado = 50;           % Debe coincidir con Main.m
Mec.altura = 0.175;       % Altura inicial del rodillo
Mec.L = 0.25;             % Altura final del rodillo
Mec.R = 0.016;            % Radio del rodillo
Mec.Long = 0.2;           % Longitud del tirante
Mec.rod = 0.002;          % Resistencia a la rodadura
Mec.baungarte = 30;       % Parámetro de baungarte

Mec.g = [0 9.81]';        % Gravedad
Mec.Muelles.k = 2*1380;    % Rigidez del muelle
Mec.Muelles.l0 = -0.068;  % Precarga
```

```

Mec.w = 0.7; %Velocidad angular actuador
Mec.tfin = pi/Mec.w;
tspan = 0:0.001:Mec.tfin;

Mec.para = [Mec.Long Mec.w Mec.R];

%----- PARAMETROS DE SOLIDOS

Mec.Solidos(1).nombre = 'Fija';
Mec.Solidos(1).m = 0; % kg
Mec.Solidos(1).I = 0; % kg*m^2
Mec.Solidos(1).uG = [0 0]';

Mec.Solidos(2).nombre = 'Rodillo';
Mec.Solidos(2).m = 0.02683; % kg
Mec.Solidos(2).I = 0.00004914576; % kg*m^2
Mec.Solidos(2).uG = [0 0]';

Mec.Solidos(3).nombre = 'Barra';
Mec.Solidos(3).m = 0.02385; % kg
Mec.Solidos(3).I = 0.00000762372; % kg*m^2
Mec.Solidos(3).uG = [0 0]';

Mec.Solidos(4).nombre = 'Corredera';
Mec.Solidos(4).m = 0.01134/2; % kg
Mec.Solidos(4).I = 0.000002922/2; % kg*m^2
Mec.Solidos(4).uG = [0 0]';

```

6.2.2 Posición inicial

Para comenzar se obtiene la posición inicial a partir de una estimación inicial y se incluye la restricción del usuario.

```

q00 = [0 0 0 12.3 12 2*pi*0/360 6.21 53.2 2*pi*98.57/360 0 2*pi*0/360 13.1 2*pi*173/360];

options = optimoptions('fsolve','Maxiter',330000,'MaxFunEvals',330000,'Display','iter');
[q0] = fsolve(@Funeval,q00,options);

```

6.2.2.1 Función para evaluar.

```

function yp = Funeval(ys)

global Mec

t=0;
x1 = ys(1);
y1 = ys(2);
thetal = ys(3);
x2 = ys(4);
y2 = ys(5);
theta2 = ys(6);
x3 = ys(7);
y3 = ys(8);
theta3 = ys(9);
x4 = ys(10);
theta4 = ys(11);
y = ys(12);
phi = ys(13);

%----- RESTRICCION DEL USUARIO -----

y4 = Mec.altura + (Mec.L/2)*(1-cos(Mec.w*t));

```



```
vs = -(MD)\vcCt;
end
```

6.2.4.2 Aceleracion

```
function as=Aceleracion(t,ys,vs)

global Mec

%----- ECUACIÓN DINAMICA INVERSA -----
MDpunto = MatDpunto(t,ys,vs);
M2D = MatD(t,ys);
vcCtpunto = [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -(Mec.L/2)*(((Mec.w)^2)*cos(Mec.w*t))];

as = -(M2D)\(MDpunto*vs+vcCtpunto);
```

6.2.4.3 Fuerzas

```
function Fspaqui = Fuerzas(t,ys,vs,as)

% MATRIZ DE MASAS

M = zeros(14,14);

for i = 1:4

    teti = q(3*(i-1)+3);
    Atet = RotTet(teti);

    mi = Mec.Solidos(i).m;
    uG = Mec.Solidos(i).uG;
    I = Mec.Solidos(i).I + mi*(uG(1)^2+uG(2)^2);    %Teorema de Steiner

    M(3*(i-1)+1:3*(i-1)+2,3*(i-1)+1:3*(i-1)+2) = mi*eye(2);
    M(3*(i-1)+3,3*(i-1)+3) = I;
    M(3*(i-1)+1:3*(i-1)+2,3*(i-1)+3) = mi*Atet*uG;
    M(3*(i-1)+3,3*(i-1)+1:3*(i-1)+2) = mi*uG'*Atet';
end

% FUERZAS DE INERCIA

Qv = zeros(14,1);

for i = 1:4

    teti = q(3*(i-1)+3);
    A = RotMat(teti);

    dteti = v(3*(i-1)+3);

    mi = Mec.Solidos(i).m;
    uG = Mec.Solidos(i).uG;

    Qv(3*(i-1)+1:3*(i-1)+2,1) = mi*dteti^2*A*uG;
end

% FUERZAS DE GRAVITATORIA

Qgrav = zeros(14,1);

for i = 1:4

    teti = q(3*(i-1)+3);
    Atet = RotTet(teti);
```

```

mi = Mec.Solidos(i).m;
uG = Mec.Solidos(i).uG;
g = Mec.g;

Qgrav(3*(i-1)+1:3*(i-1)+2,1) = mi*g;
Qgrav(3*(i-1)+3,1) = mi*uG'*Atet'*g;

end

% FUERZAS DE ELASTICA

Qmuelle = zeros(14,1);

Qmuelle(4,1) = Mec.Muelles.k*(q(4) + Mec.Muelles.l0);

% FUERZAS DE RODADURA

Qf = zeros(14,1);

load xx.txt ;
xpunto=xx(1,:);
load yy.txt ;
ypunto=yy(1,:);
load mm.txt ;
mpunto=mm(1,:);

mm = polyfit(ypunto(100:1000),mpunto(100:1000),4);
dxdy = mm(1)*ys(13).^4+mm(2)*ys(13).^3+mm(3)*ys(13).^2+mm(4)*ys(13)+mm(5);

btheta = acos(-1./(sqrt(1+(dxdy).^2)))';

n = size(dxdy);

A=zeros(14,n(2));
A(4,:) = sin(btheta);
A(5,:) = cos(btheta);
A(6,:) = Mec.R;

B=zeros(n(2),13);
B(:,7) = cos(btheta);
B(:,8) = sin(btheta);

Qf=A*Mec.rod*B;

D = MatD(t,ys);
A = [0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];

Fspaqui = ([D(1:13,:)-Roz';A])\'(M*as-Qv-Qgrav-Qm));

```


7 RESULTADOS

*Math is not about numbers, equations,
computations, or algorithms: it is all about
understanding.
- William Paul Thurston -*

Como bien es sabido, la principal ventaja del planteamiento sistemático para la simulación dinámica de este mecanismo, es que se pueden obtener de forma directa el valor de todas las coordenadas de los sólidos, así como las velocidades de cualquiera de sus puntos y aceleraciones. Por otro lado, con los multiplicadores de LaGrange definidos en los apartados anteriores se pueden encontrar las fuerzas de reacción en cada uno de los pares cinemáticos del mecanismo, así como, la fuerza del actuador, que era lo que realmente se buscaba con este estudio. En este capítulo se presentan y comentan estos resultados obtenidos.

7.1 Posición inicial

Los primeros datos y de mayor interés que se obtienen del programa es la posición inicial de los sólidos para comenzar la integración del movimiento. Se obliga al programa a aprovechar todo el perfil de leva, marcando la posición inicial y final de la coordenada y . El único inconveniente de esta restricción es que la interpolación en la parte inicial de la leva es muy pobre, por lo que los resultados obtenidos en las diferentes coordenadas es posible que tengan un comportamiento inusual en estos primeros segundos de simulación.

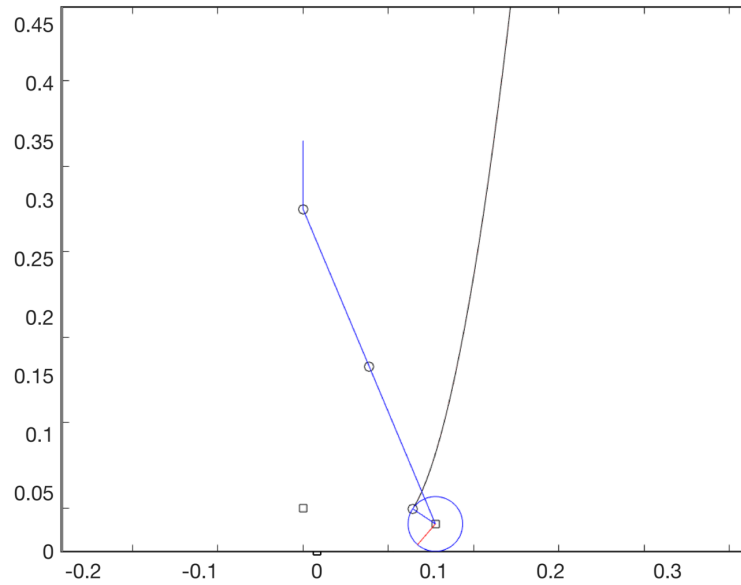


Figura 7-1 Posición inicial de todos los sólidos.

7.2 Trayectorias

En este apartado se estudian las trayectorias que toman los diferentes sólidos del mecanismo a lo largo del movimiento hasta el final de la trayectoria. El estudio se llevará a cabo separando las coordenadas x e y . Así, dado que el actuador está imponiendo el movimiento vertical del *Sólido 4* será más intuitivo comentar las demás trayectorias a partir de esta.

Antes de comenzar, se presentan en la siguiente figura las trayectorias finales de los diferentes sólidos.

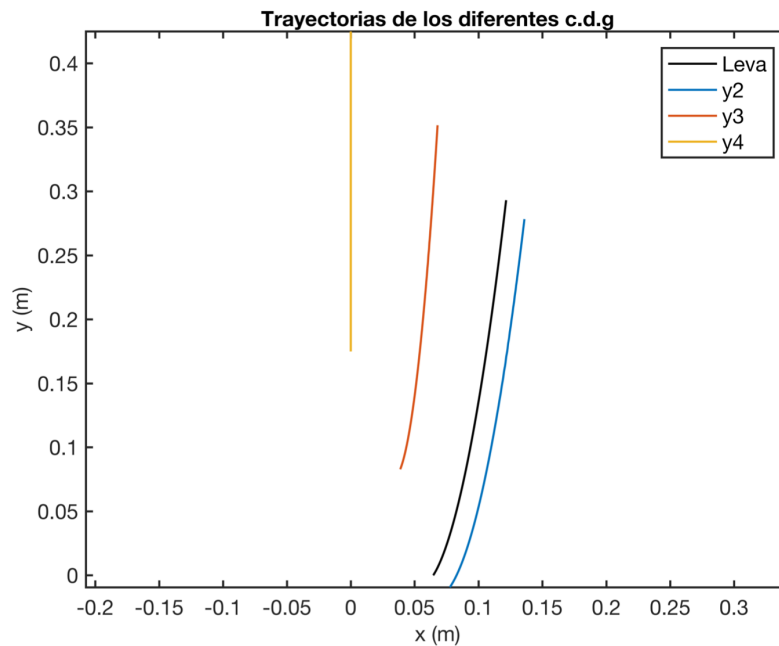


Figura 7-2 Recorrido del centro del *Sólido 2*.

Observando cada una de las trayectorias se puede saber a priori que el *Sólido 4* solo realiza un movimiento vertical, como es obvio, que el *Sólido 3* experimenta un pequeño giro acompañado de un leve

desplazamiento en *eje x*, en comparación al desplazamiento del *eje y*. Por último, el *Sólido 2* girará para ir rodando a lo largo de leva, elevando su coordenada y desplazando en menor magnitud la coordenada *x*.

7.2.1 Valores que se mantienen nulos

Como se acaba de comprobar en esta primera aproximación existen diferentes valores que deben permanecer nulos. En primera instancia, los que marcan la posición de la leva, x_1 , y_1 , y θ_1 , y, por otro lado, x_4 y θ_4 , que como bien se comprobó en el desarrollo de las restricciones de par prismático, también permanecían deberían permanecer nulas. En la siguiente figura, se comprueban todas estas hipótesis.

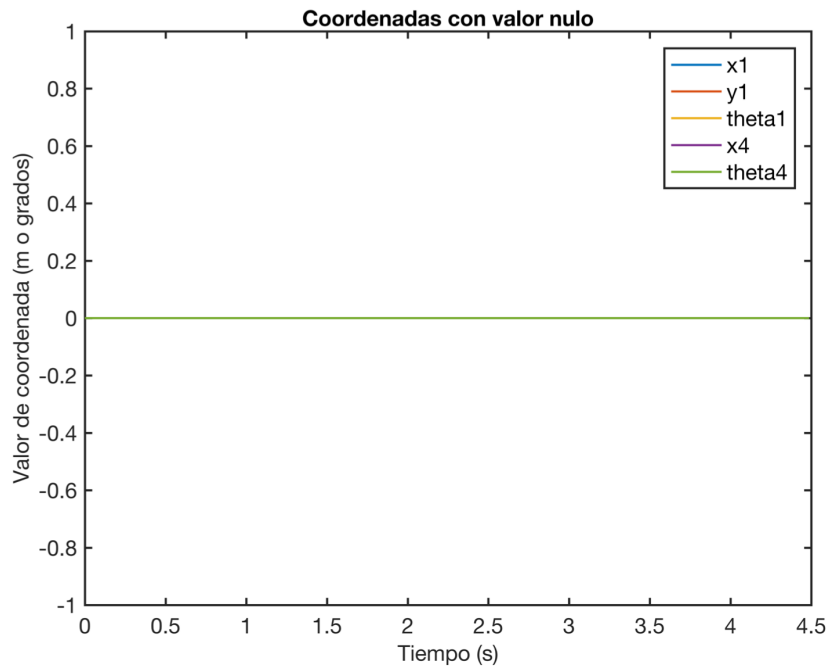


Figura 7-3 Coordenadas que deben ser nulas.

7.2.2 Movimientos en X

En la siguiente figura se presentan los movimientos en *eje x* de los *Sólidos 2* y *3*. Como bien se puede apreciar, los valores de estos crecen muy rápidamente al comienzo para luego tender a ser constantes. Esto está justificado por el mismo perfil de la leva, que si se observa detenidamente y se imagina que este continúa elevándose, el perfil sería prácticamente vertical, anulando así cualquier movimiento en *eje x*. En cuanto a las magnitudes de estas coordenadas se sabía a priori que debían ser relativamente de poca magnitud, en especial la trayectoria del *Sólido 2*, ya que está tiene el mismo incremento que el perfil de la leva, ya que va girando por todo su recorrido, Así la trayectoria de la leva forma la evolvente del recorrido del *Sólido 2*.

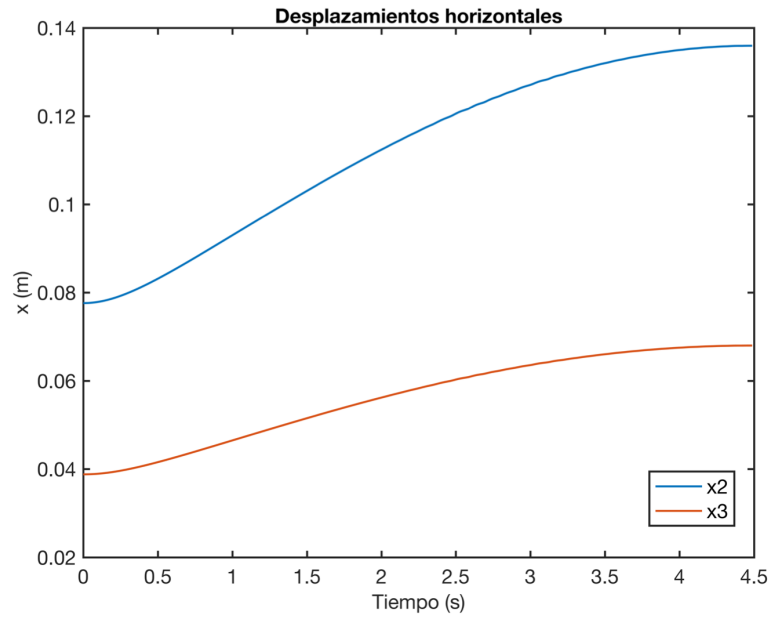


Figura 7-4 Desplazamientos que realizan la coordenada x de los *Sólidos 2 y 3*.

7.2.3 Movimientos en Y

De los desplazamientos en el *eje y* se esperaba que tuvieran toda la misma forma que el desplazamiento del actuador, como bien se puede apreciar. Por otro lado, todos ellos tendrían prácticamente el mismo incremento, ya que por un lado el *Sólido 3* no rota lo suficiente como para amortiguar este desplazamiento y el *Sólido 2* está condenado a seguir el perfil de la leva. Dentro de este último sólido se comprueba además que la coordenada y y y_2 , punto de contacto de leva-rodillo y centro del rodillo tienen prácticamente la misma posición excepto al principio, ya que como se puede observar en la posición inicial del recorrido, el centro de gravedad del rodillo se encuentra por debajo.

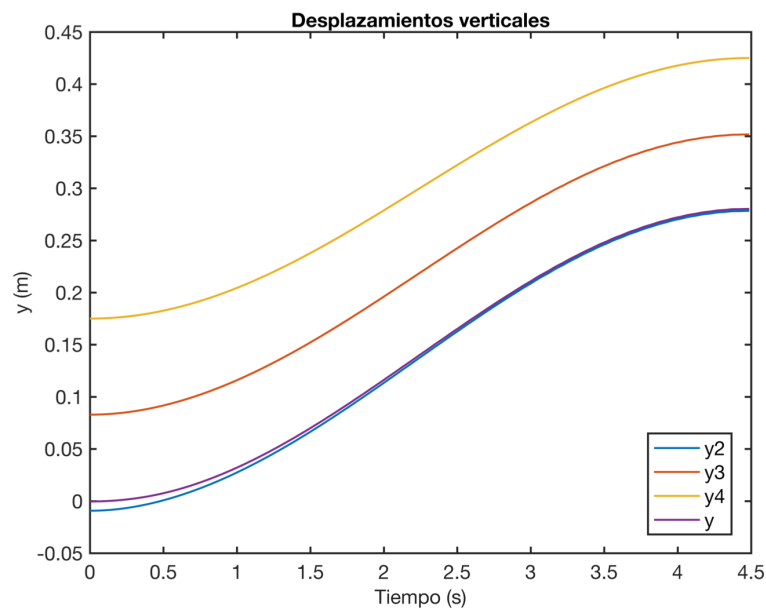


Figura 7-5 Desplazamiento que realizan las coordenadas y .

7.2.4 Giros

En cuanto a los giros, primeramente, se observa como el giro del *Sólido 3* es prácticamente nulo, por su longitud, no tiene por qué hacer ningún giro prácticamente para cumplir con las restricciones, como ya se vio en la figura de todas las trayectorias.

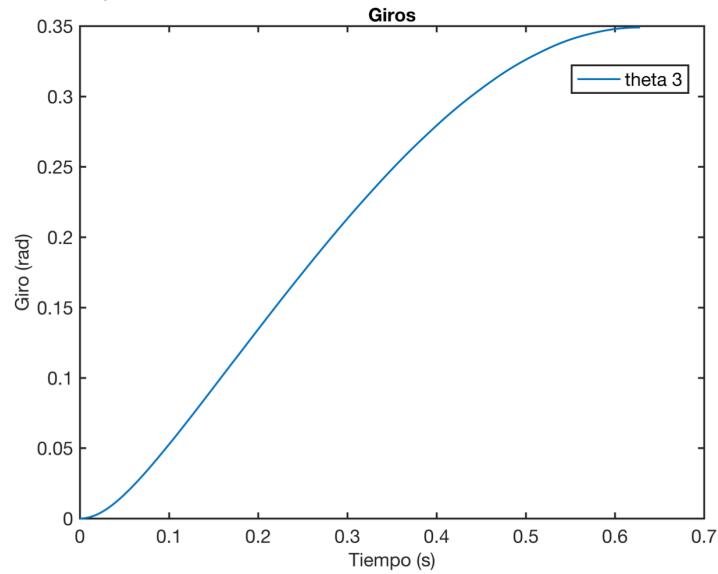


Figura 7-6 Giro de la coordenada θ_3 .

Por otro lado, se tiene el giro de *Sólido 2*, el cual es el responsable implícitamente de dos giros como se puede apreciar en el siguiente esquema.

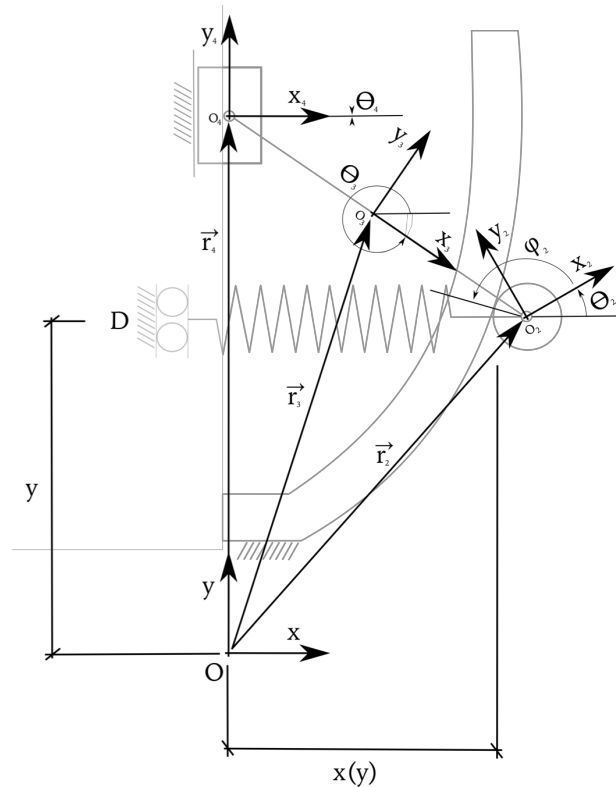


Figura 7-7 Definición de las coordenadas ϕ_2 y θ_2 .

De esta forma, si se considera el *Sólido 2* girando a lo largo del perfil de la leva se comprende que en cuanto la coordenada generaliza θ_2 , comienza crecer, la coordenada no generalizada ϕ_2 disminuye, generando por tanto el movimiento contrario de una frente a la otra, tal y como se puede observar en los resultados obtenidos.

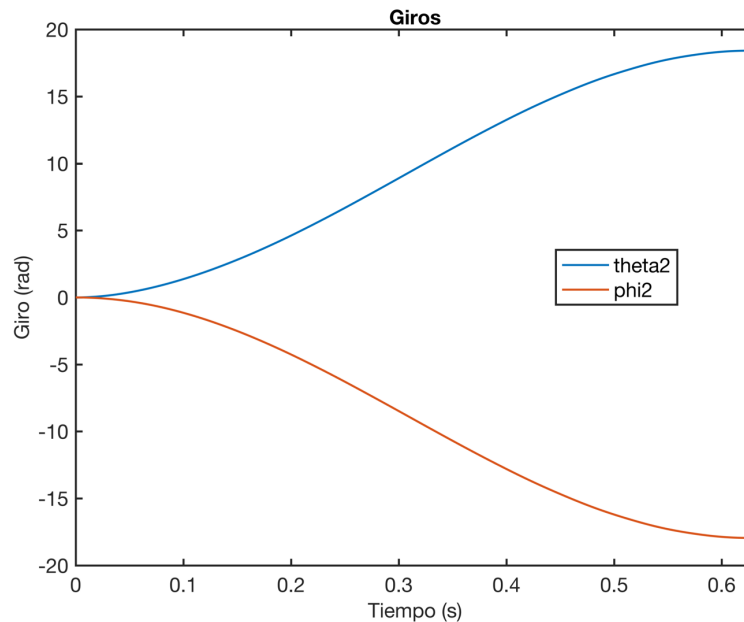


Figura 7-8 Giro de la coordenada θ_2 y ϕ_2 .

7.3 Velocidades

Una vez obtenidas las posiciones de todos los sólidos se puede pasar a observar las velocidades que cumplirán los valores determinados para cumplir las posiciones que se requieren. Es importante en todo este apartado tener en cuenta que las velocidades del actuados, comienzan en cero, ya que parten del reposo y por otro lado terminan en 0, ya que queda completamente parado el sistema.

7.3.1 Valores que se mantienen nulos

Como bien se ha visto que existen diferentes coordenadas que mantienen su posición nula, es obvio que sus velocidades también lo sean, como se comprueba en la siguiente figura.

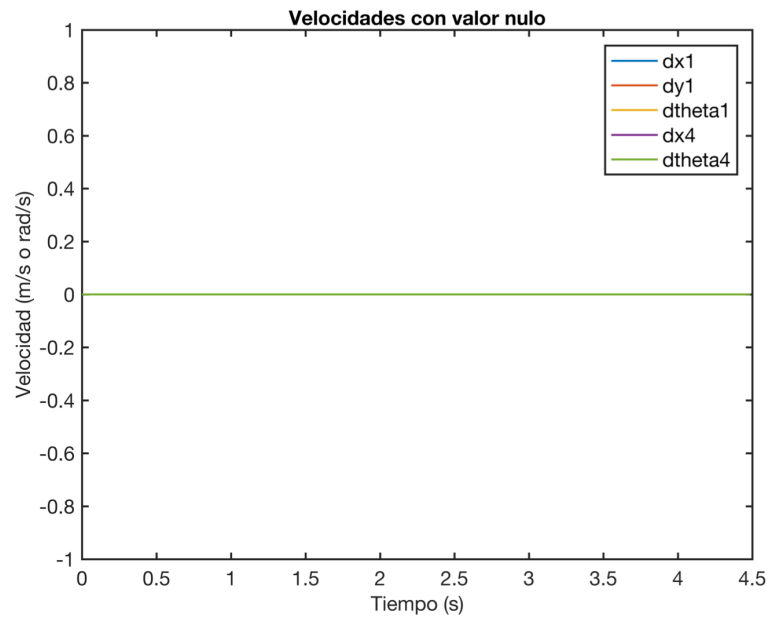


Figura 7-9 Velocidades que deberían dar valor nulo.

7.3.2 Velocidades en X

Para estudiar las velocidades en el *eje x* se tiene en cuenta que todas las velocidades deben empezar y acabar en valores nulos, por lo comentado al comienzo de este apartado. Así, centrando la atención en las velocidades del *eje x*, y recordando el movimiento que estas coordenadas realizaban se tiene que, en la parte final de su recorrido, sus posiciones eran prácticamente constante, se debe obtener que la velocidad al comienzo de su trayectoria debe ser mayor en el resto de esta. Así se observa que se obtiene un pico justo al comienzo, y que esta comienza a caer cuando más constante se hace la trayectoria en el *eje x*.

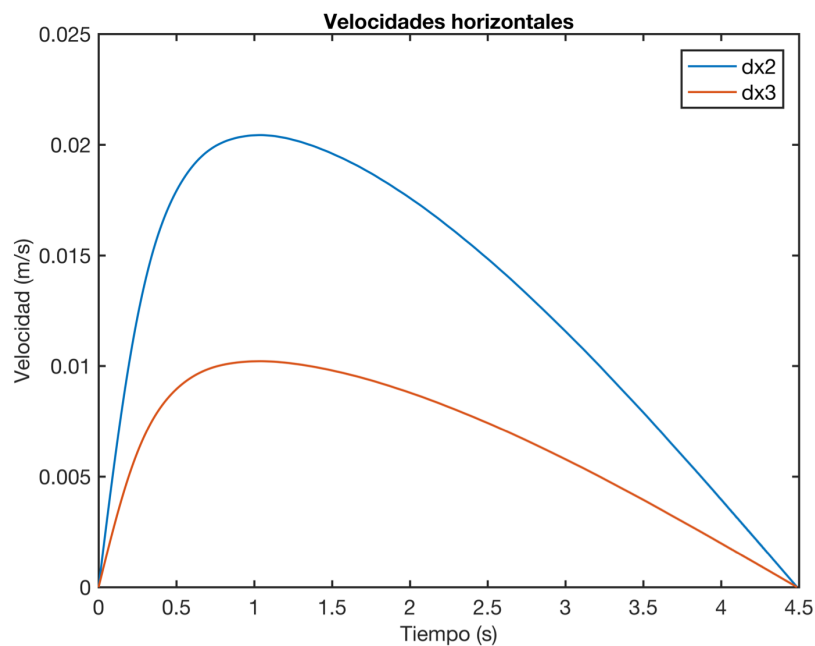


Figura 7-10 Velocidades en *eje x*.

7.3.3 Velocidades en Y

Como bien se sabía por las trayectorias, se puede sponer que, si las trayectorias son parecidas, las formas de sus velocidades deben ser todas similares, al estar todas gobernadas por el mismo intervalo de tiempo. Así, también se considera que la forma de todas ellas debería ser parecida a la del actuador ya que esta gobierna los desplazamientos en y .

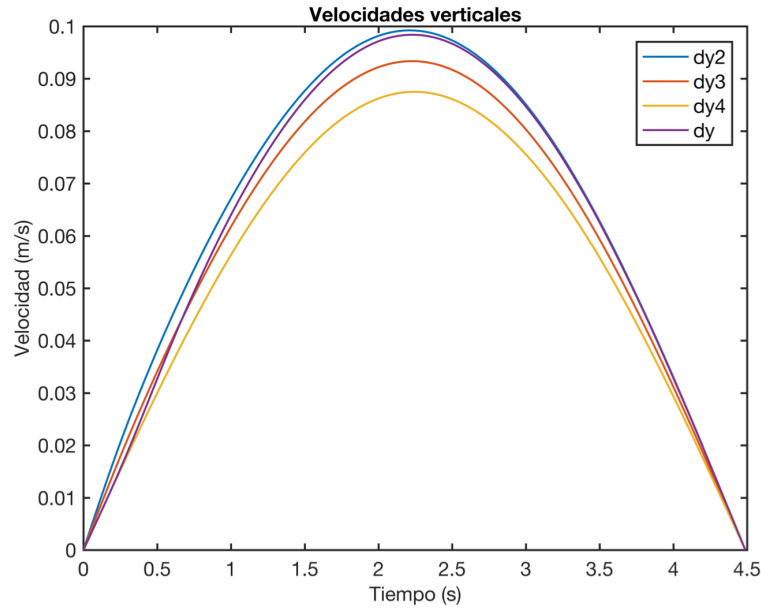


Figura 7-11 Velocidades en el *eje y*.

7.3.4 Velocidades angulares

En este punto se cumple igualmente que las velocidades angulares comiencen y acaben en 0, pero además se ve que estas están gobernadas por la restricción que sufren la coordenada θ_2 y ϕ_2 se similitud inversa. Por otro lado, se tiene la velocidad angular de la coordenada θ_3 , que como era de esperar, ya que sus desplazamientos son muy pequeños, sus velocidades también.

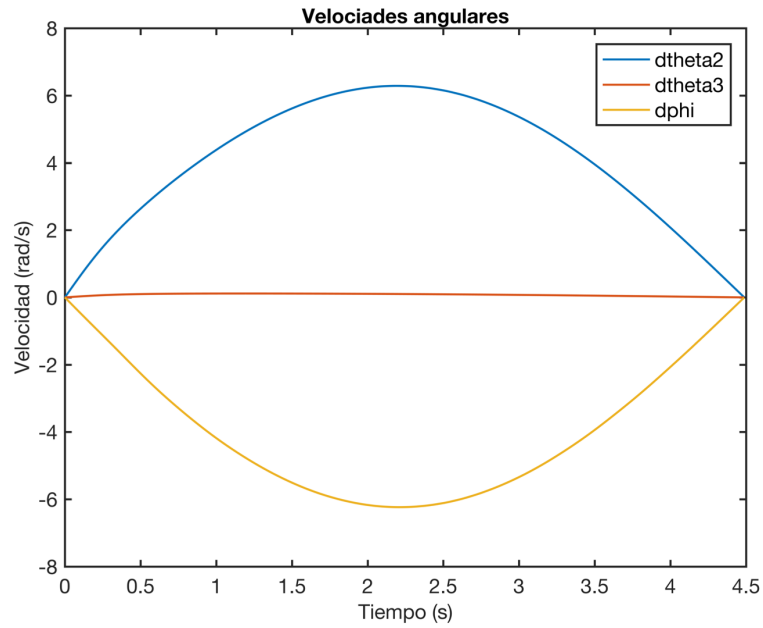


Figura 7-12 Velocidades angulares.

7.4 Aceleraciones

Como bien es sabido por los capítulos anteriores, una vez obtenidas las posiciones y las velocidades se pueden obtener las aceleraciones. Estas no tendrán un valor tan intuitivo como ocurría con las anteriores magnitudes, pero sí que tienen sentido físico concorde al movimiento del mecanismo.

7.4.1 Valores que se mantienen nulos

Al igual que se hizo con las posiciones y las velocidades de las coordenadas que deben tener valor nulo, se obtienen las aceleraciones de estas, nulas como es obvio.

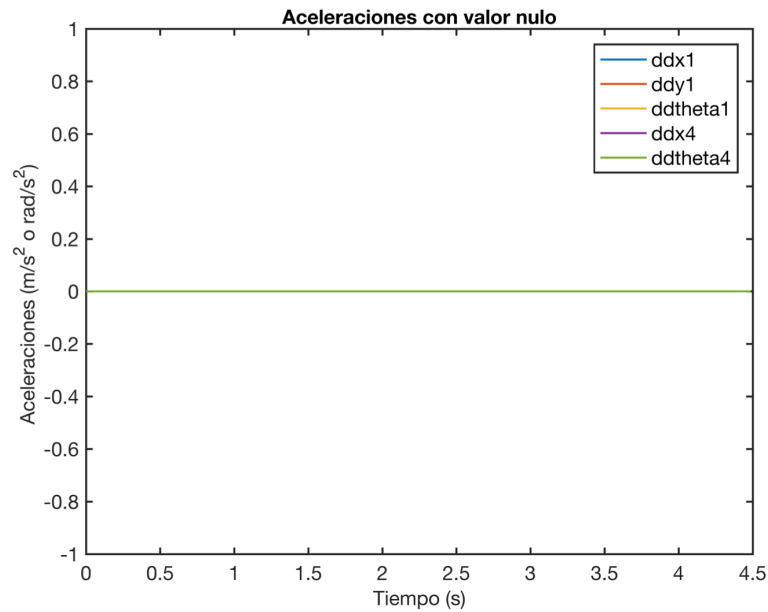


Figura 7-13 Aceleración que deben dar valor nulo.

7.4.2 Aceleraciones en X

Como se puede observar en la siguiente figura las aceleraciones tanto del *Sólido 2* como del *Sólido 3* comienzan con un alto valor para iniciar el movimiento y desde ese momento comienzan a descender hasta llegar a valor nulo, momento en el que empiezan a ser negativas para frenar al mecanismo. Todo este comportamiento está en concordancia con las velocidades de estos sólidos ya que en el momento de aceleración nula es justo cuando se obtiene la velocidad máxima antes de que esta comience a decaer por la acción de la aceleración negativa. A su vez, la aceleración del *Sólido 2* es mayor que la del *Sólido 3* por el mero hecho de que este recorre más trayecto y por ello necesita más velocidad y por tanto más aceleración para llevar a cabo en el mismo tiempo.

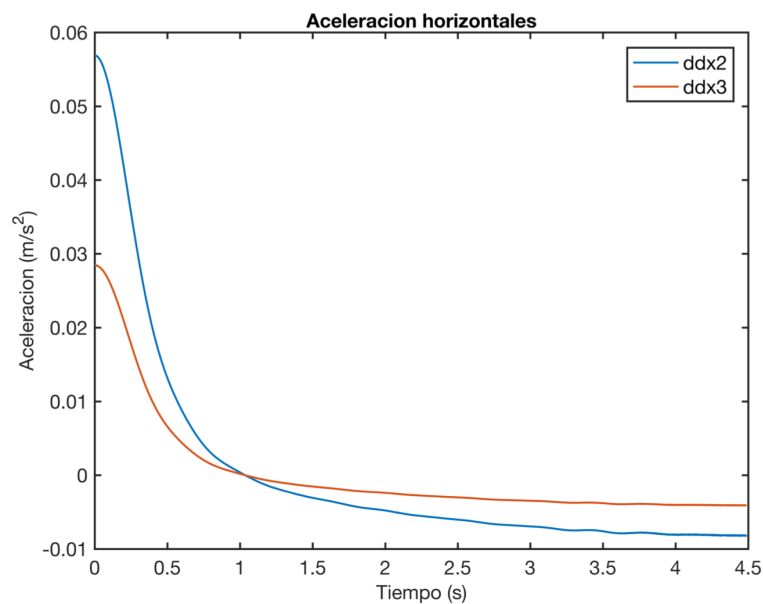


Figura 7-14 Aceleraciones en *eje x*.

7.4.3 Aceleraciones en Y

Al igual que ocurría con las posiciones y las velocidades, como el movimiento viene impuesto por una coordenada que se desplaza en el eje vertical, estas toman la misma forma. El mismo efecto ocurre con las aceleraciones. Por otro lado, al igual que las aceleraciones en el *eje x*, estas llegan a ser negativas en cierto punto ya que comienzan a realizar la frenada de los sólidos hasta su posición final estática.

Un detalle en esta figura son los valores que obtiene la coordenada y que marca el punto de contacto. Estos vienen influenciados por la mala interpolación al principio de la superficie de la leva como bien se comentó al comienzo de este capítulo.

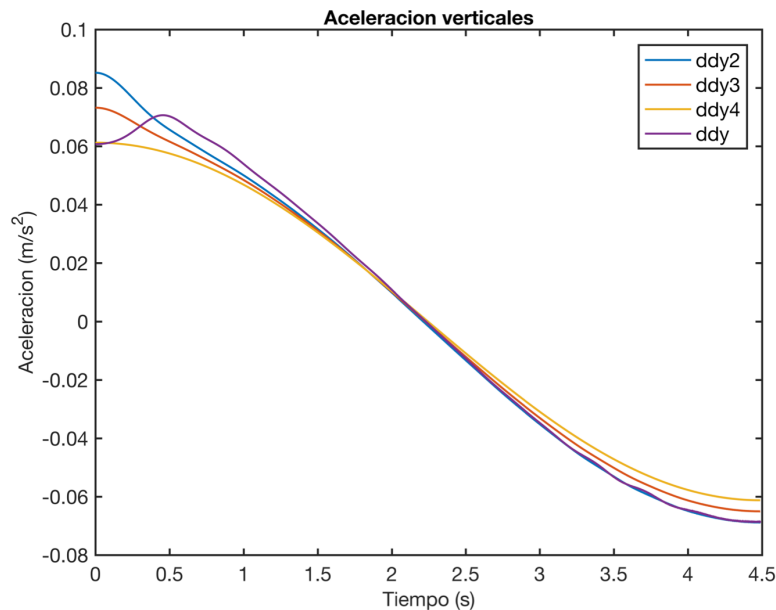


Figura 7-15 Aceleraciones en *eje y*.

7.4.4 Aceleraciones angulares

Las aceleraciones angulares cumplen los mismos patrones que todas las aceleraciones comentadas en estos últimos apartados. Por un lado, pasan a ser negativas en cierto instante para desacelerar al sólido y por otro lado se cumple la complementación entre θ_2 y ϕ_2 como ya pasaba en las velocidades y las posiciones de estas variables. Además, estas dos últimas coordenadas también se ven influenciadas al comienzo del movimiento por la mala interpolación de la leva, al igual que ocurría con la coordenada y.

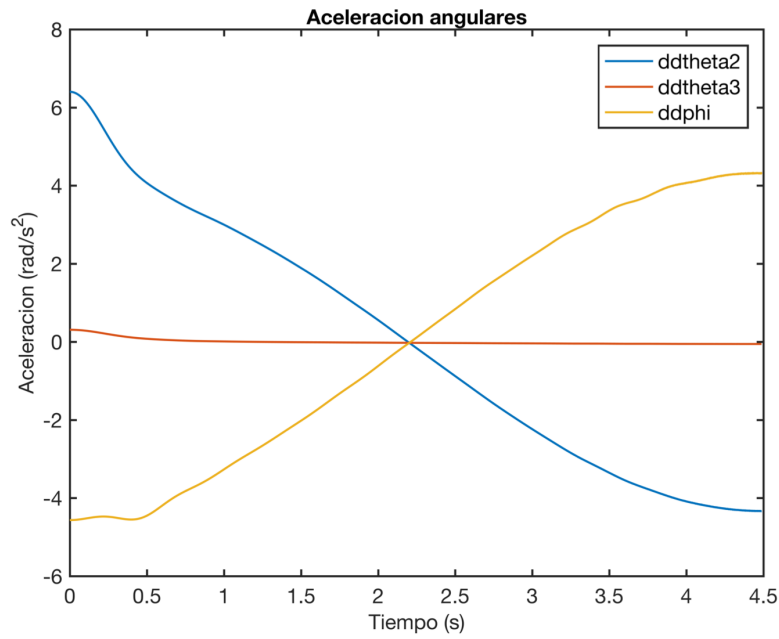


Figura 7-16 Aceleraciones angulares.

7.5 Fuerzas

Por último, se omiten las fuerzas de reacción en cada uno de los pares y se centra la atención en la fuerza a objetivo. Como bien era sabido la fuerza a obtener es de 25 N y como se puede apreciar en la siguiente figura es el valor obtenido.

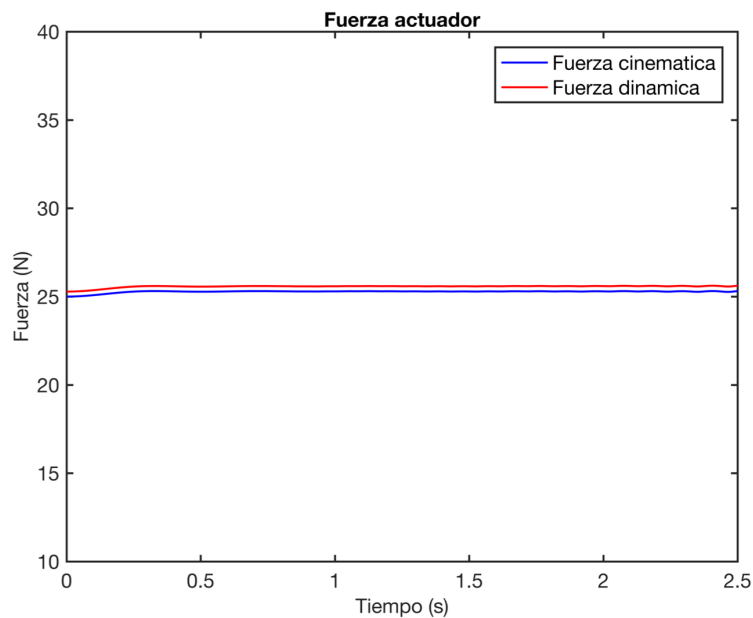


Figura 7-17 Fuerzas obtenidas.

Se representa además la fuerza obtenida por el teorema de las fuerzas vivas, la cual se obtiene a partir del equilibrio de fuerzas de la siguiente figura.

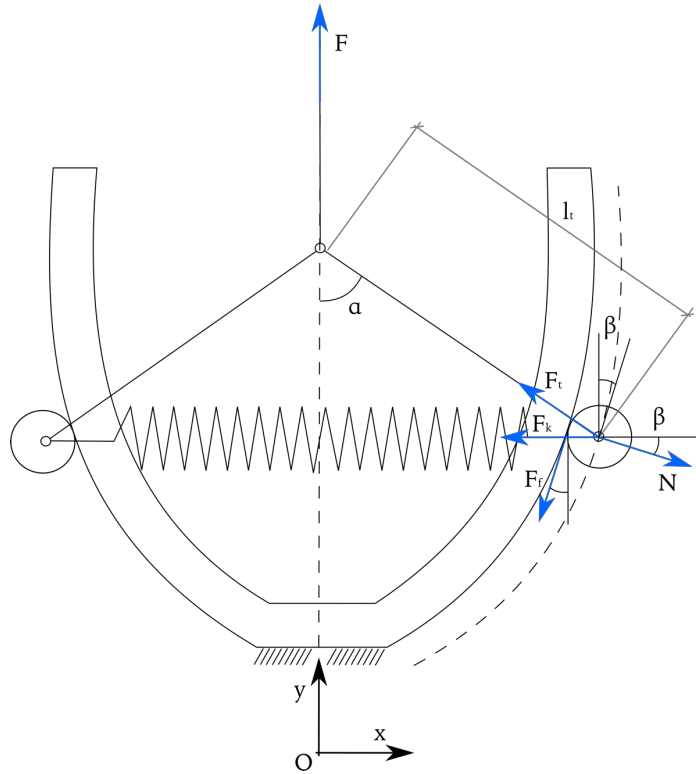


Figura 7-18 Descomposición de fuerzas en *Sólido 2*.

Donde haciendo equilibrio de fuerzas y solo considerando F y F_k para simplificar el análisis se obtiene:

$$F * \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{q}_y^4 \end{bmatrix} = F_k * \begin{bmatrix} \dot{q}_x^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 7-1$$

Y despejando F :

$$F = \frac{F_k \dot{q}_x^2 + P * \dot{q}_y^2}{\dot{q}_y^4} \quad 7-2$$

De esta forma se obtiene de forma aproximada el valor de F , comprobando que la cinemática del sistema está calculada de forma correcta.

Pasando a comentar la figura anterior, primeramente, se obtiene que la diferencia entre ambas fuerzas, como se ha podido entender en estas últimas operaciones viene dada por las simplificaciones echas en las expresiones 7-1 y 7-2.

Por otro lado, al comienzo del movimiento se obtiene una desviación que como bien es sabido por los apartados anteriores se tiene que es debido a la mala interpolación de la leva en el primer tramo del perfil. En el resto del tramo se obtiene una fuerza constante con pequeñas desviaciones debidas a la interpolación como se puede ver en la siguiente figura.

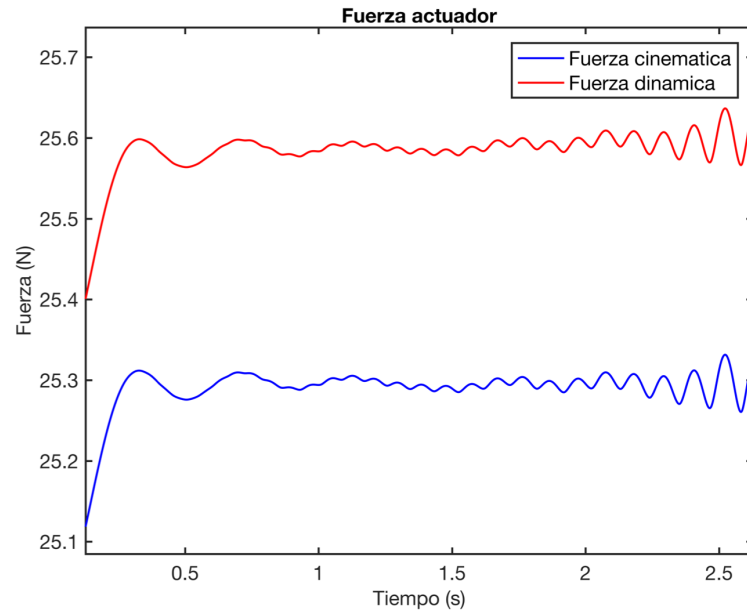


Figura 7-19 Forma de la fuerza del actuador.

Estas desviaciones son inapreciables ya que son del orden de 0.015 N y además son inevitables ya que con otro programa de simulación u otras formas de interpolación como han hecho los investigadores en la bibliografía (Javier López-Martínez, 2017) también se obtienen estas desviaciones.

8 CONCLUSIONES

*The first chapter sells the book; the last chapter
sells the next book.
- Mickey Spillane -*

En este último capítulo pretende ser un medio condensador de toda la información que se puede obtener del estudio realizado, así como un medio de unión a las conclusiones obtenidas en (Javier López-Martínez, 2017) para ampliar los conocimientos que se tiene hasta el momento de este mecanismo. Así también se da un primer paso para hacer el mismo estudio con los mecanismos presentados en esta misma bibliografía.

8.1 Conclusiones

Como ya se sabe de (Javier López-Martínez, 2017) según las expresiones por las que se ve determinado el perfil de leva, este es totalmente dependiente de los parámetros de rigidez, k , longitud del Sólido 3, l_t , y coeficiente de rodadura, μ . Así, a mayor coeficiente de fricción, se obtiene un perfil de leva para el movimiento de subida con una anchura menor que para el movimiento de bajada y como ya se vio está diferencia de anchuras era menor, cuanto mayor era el coeficiente de fricción. Por otro lado, un aumento de la longitud del tirante provoca un aumento del ángulo α , aumentando así la normal N y llevando a los mismos efectos recién comentados para el coeficiente de rodadura μ . El coeficiente de rigidez por su parte genera un aumento de la anchura de la leva cuanto menor es el coeficiente.

Por tanto, si se pretende obtener una leva de pequeña anchura es preferible elegir coeficientes de rigidez moderados, controlando a la vez la capacidad de elongación del elemento elástico, así como longitudes del Sólido 3 cuanto mayor mejor, siempre cuidando la ergonomía del mecanismo y materiales con coeficientes de rodadura pequeños para así sofocar los desfases entre las fuerzas de subida y bajada.

Una vez que se ha diseñado cuasiestáticamente el perfil de leva con los determinados parámetros, se puede continuar jugando con los parámetros, para estudiar que influencia tienen, esta vez, sobre la fuerza de salida en la simulación dinámica.

En primera instancia si se mantienen los parámetros de diseño de la superficie de la leva se obtiene un valor muy aproximado a la fuerza objetivo con una diferencia de 0.5 N , debido a las masas de los diferentes sólidos. Estas masas consiguen modificar la fuerza de salida por el mero peso de sus sólidos. Ya que el actuador tiene que vencer la fuerza del muelle además del peso de los sólidos.

Por su lado, para valores mayores de la velocidad del actuador no se obtienen modificaciones importantes. Si hay una fuerza que pudiera desprender la fuerza constante de este mecanismo esas son las fuerzas de inercia. Para ver exactamente el efecto de las fuerzas de inercia, se aumenta la velocidad del actuador y se obtiene a mayores velocidades un aumento de la fuerza inicial.

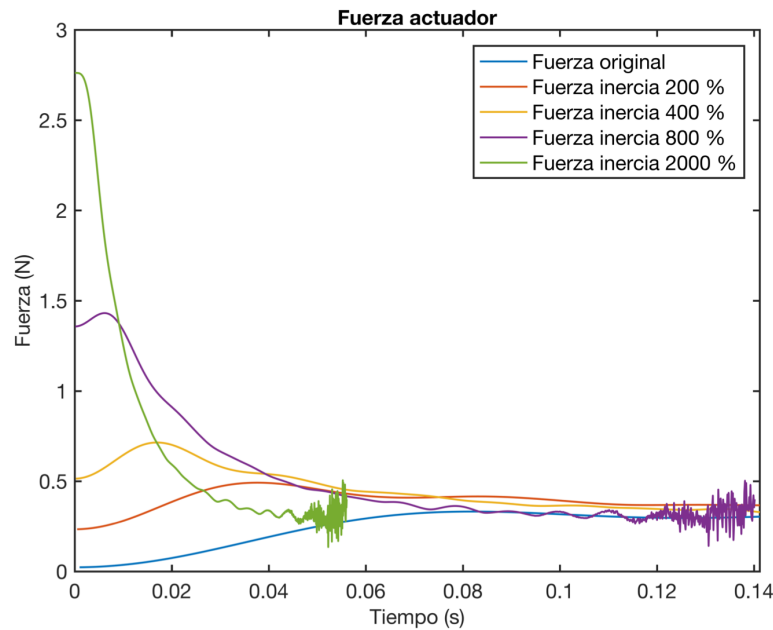


Figura 8-1 Fuerza actuador con incremento de masas y velocidad.

Este efecto de la inercia se ve más acentuado cuanto mayores son las masas del sistema. Un aumento de las masas como ya se ha visto, además de agrandar la fuerza neta, incrementa la fuerza de inicio del movimiento. Pero como ya se ha visto, para que estos efectos sean importantes se debe aumentar la masa, así como una velocidad que hace que el movimiento dure 0.3 segundos lo cual no es posible para la aplicación real de este mecanismo.

Incrementando las masas solamente se sigue manteniendo una fuerza constante, pero de módulo mayor. Solo llevando a cabo una duplicación de las masas de los diferentes sólidos se obtiene un aumento de la fuerza de salida llevando a obtener una media de 26.2 N

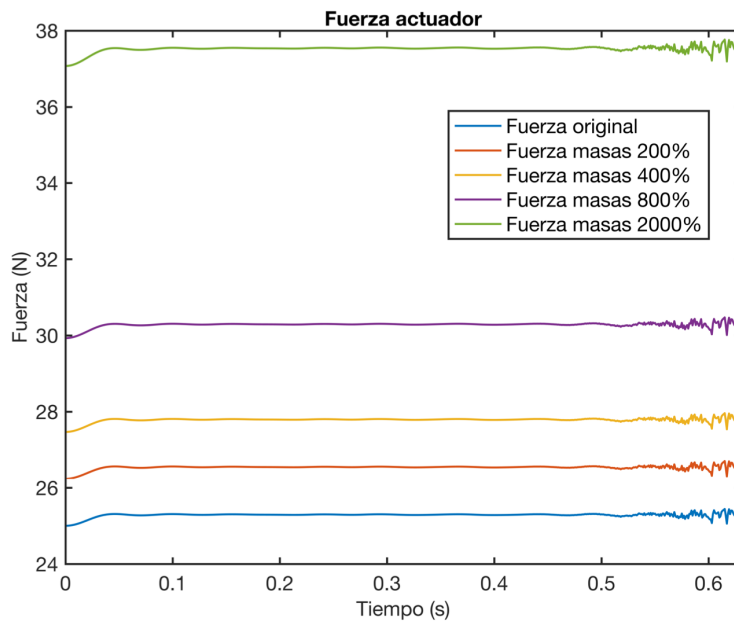


Figura 8-2 Fuerza actuador con incremento de masas.

Por lo que, para obtener un mecanismo preciso en cuanto a fuerza objetivo, se requieren masas lo más moderadas posibles. Esto es debido a que, para masas mayores, el usuario debe vencer la fuerza del muelle además del peso de los distintos sólidos.

Examinando ahora el comportamiento dinámico del sistema ante cambios en la rigidez del muelle con un perfil de leva ya compilado, se obtienen fuerzas de salida proporcionales. Es decir, se mantiene la fuerza constante durante todo el perfil de la leva, pero con un mayor módulo. El efecto de un aumento de la rigidez del muelle es una multiplicación de la fuerza resultante.

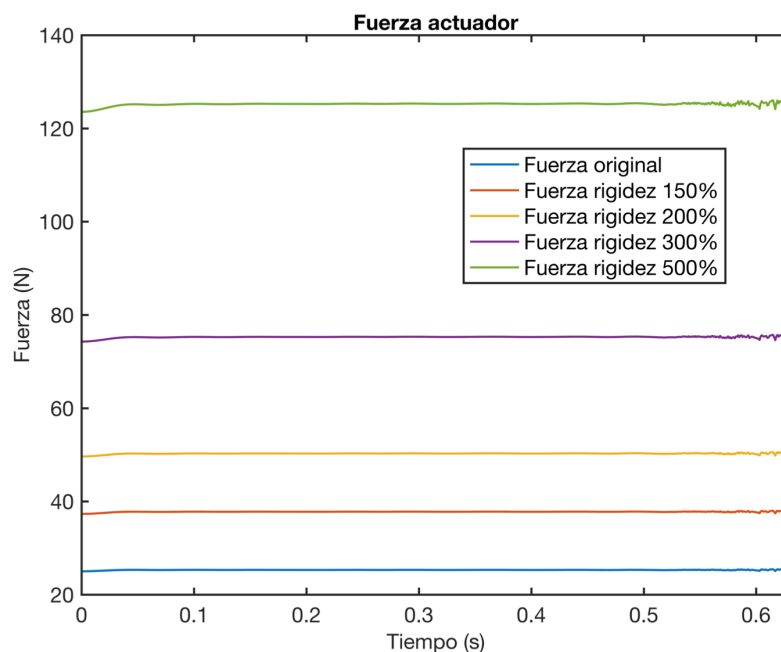


Figura 8-3 Fuerza actuador con diferentes rigideces.

Este aumento proporcional de la fuerza resultante respecto al aumento de las rigideces tiene grandes aplicaciones y da una versatilidad enorme al mecanismo. Dado que el uso original que se quiere dar al sistema es su implementación en centros deportivos, se podría obtener un cambio de fuerzas resultantes sin modificar el mecanismo solo modificando los muelles de este mediante algún sistema rápido y eficaz. Resulta interesante el hecho de que ni las velocidades ni las aceleraciones de ninguno de los sólidos se ven afectadas por ninguna de estas modificaciones. Esto se debe a que las modificaciones en los diferentes parámetros son absorbidas por la fuerza resultante. Esta última se ve modificada para mantener el comportamiento del resto del mecanismo ante estos cambios.

8.2 Ampliación del estudio

Una aplicación futura de este modelo matemático y computacionales sería su aplicación al estudio de los modelos presentados en (Javier López-Martínez, 2017). Así, realizando varias modificaciones a este programa, se podrían estudiar los otros dos mecanismos de leva restantes de la bibliografía (Javier López-Martínez, 2017).

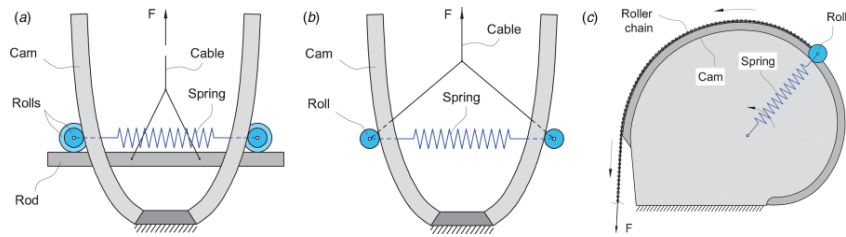


Figura 8-4 Mecanismos presentados en (Javier López-Martínez, 2017).

En la figura 8-3 se tienen los tres mecanismos, de los cuales el segundo es el estudiado dinámicamente en este documento. Se plantean a continuación las diferencias entre el estudio realizado y los hipotéticos cambios a realizar para llevar a cabo el mismo estudio de los restantes mecanismos.

8.2.1 Mecanismo A

Este primer mecanismo aun siendo prácticamente el mismo que en el caso ya estudiado, introduce diferentes cambios a tener en cuenta. Comenzando por los diferentes sólidos que conforman el sistema, en este caso se cuenta con tres y no con cuatro sólidos. Esto es debido a que el sólido cuarto quedaría unido al sólido tercero que a su vez hace las veces de barra que propulsa a los rodillos. Esta es la principal diferencia entre los mecanismos *B* y *A*, la forma en la que se transmite el movimiento desde el actuador a los rodillos. Con estas consideraciones, el esquema del mecanismo sería el que se presenta en la imagen siguiente, donde se puede apreciar el enlace rígido entre el travesaño que proporciona el movimiento al *Sólido 2* y el actuador.

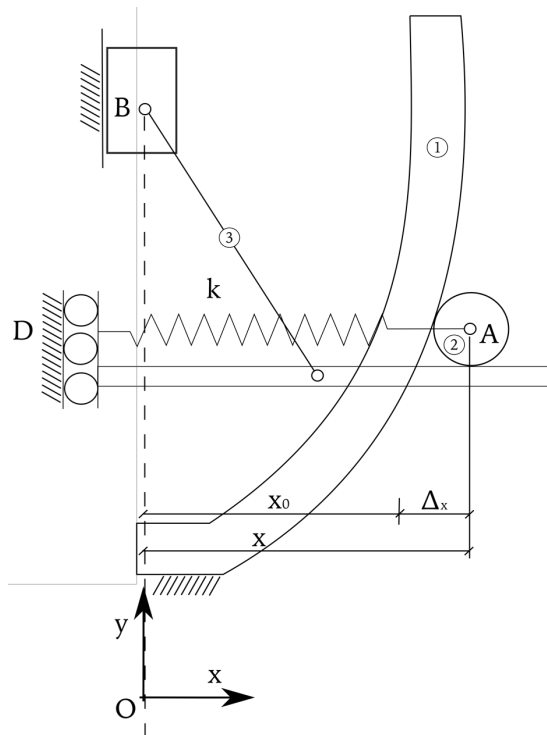


Figura 8-5 Esquema del mecanismo A.

La propia anatomía de este mecanismo hace que obviamente las coordenadas y los pares cinemáticos que relacionan los distintos sólidos cambien respecto al mecanismo estudiado. Así se tendrán como coordenadas las nueve generalizadas correspondientes a cada uno de los sólidos y más dos no generalizadas correspondientes a cada par de leva, el formado por el *Sólido 2* y la *barra fija*, y por otro lado entre el *Sólido 2* y el *Sólido 3*, este último sin la restricción de rodadura sin deslizamiento.

$$q = [x_1 \ y_1 \ \theta_1 \ x_2 \ y_2 \ \theta_2 \ x_3 \ y_3 \ \theta_3 \ y \ \phi^2] \quad 8-1$$

Dando lugar a las siguientes restricciones.

En primer lugar, entre el *Sólido 2* y la barra fija, se da un par de leva, donde se tendrán sus respectivas restricciones de posición del punto de contacto *C*.

$$r^1 + A^1 \bar{u}_C^1 - r^2 - A^2 \bar{u}_C^2 = 0 \quad 8-2$$

Además, en ese mismo punto se da la restricción de contacto perpendicular y rodadura sin deslizamiento, así:

$$r_P^2 * \vec{t}(y) = 0 \quad 8-3$$

Y para la rodadura sin deslizamiento:

$$v_C^2 * \vec{t}(y) = 0 \quad 8-4$$

Como bien es sabido, en este mecanismo el *Sólido 3* proporciona el movimiento al *Sólido 2* mediante un empuje, que se traduce en un par de leva sin la restricción de rodadura sin deslizamiento en el punto B.

$$r^1 + A^1 \bar{u}_B^1 - r^2 - A^2 \bar{u}_B^2 = 0 \quad 8-5$$

Y para el contacto perpendicular:

$$r_B^2 * \vec{t}(y) = 0 \quad 8-6$$

Por último, para completar las 8 restricciones se tiene el par prismático formado entre el *Sólido 1* y el *Sólido 3*.

$$(A^1 \vec{h}^1)^T (r^1 + A^1 \bar{u}_O^1 - r^3 - A^3 \bar{u}_B^3) = 0 \quad 8-7$$

8.2.2 Mecanismo C

Este último mecanismo es la mínima expresión de los otros dos mecanismos ya presentados. Así es tan simple que su esquema no aporta mayor información que el sketch ya presentado en la 8-3. El *Sólido 1* sería la leva en sí, tal y como en los mecanismos anteriores, y el *Sólido 2* rueda sin deslizar alrededor de esta propulsado por una correa que desliza por el perfil del sólido primero. Aun así, se debe introducir un nuevo sólido para poder introducir el actuador del sistema. Este nuevo sólido tendrá un par de rotación con el *Sólido 1* en el mismo punto donde se une el elemento elástico, y por otro lado se unirá al *Sólido 2* mediante un par prismático. Sus coordenadas serán por tanto las nueve generalizadas más dos respectivas al par de leva, tal que:

$$q = [x_1 \ y_1 \ \theta_1 \ x_2 \ y_2 \ \theta_2 \ x_3 \ y_3 \ \theta_3 \ y \ \phi^2] \quad 8-8$$

Así este *Sólido 3* introducirá el movimiento en el sistema mediante la coordenada θ_3 .

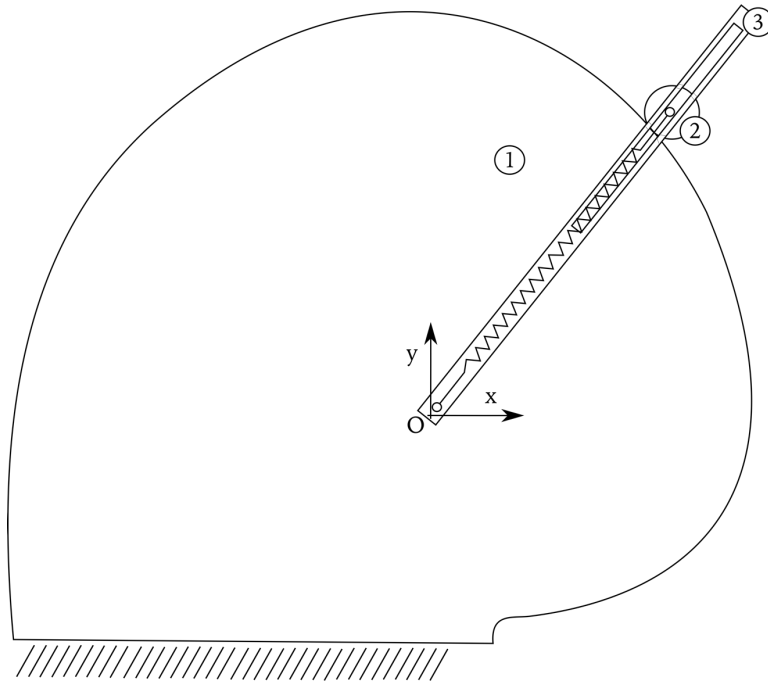


Figura 8-6 Esquema del mecanismo C.

Así, como se ha comentado estas cumplirían las restricciones de par de rotación entre el *Sólido 1* y *Sólido 3*.

$$r^1 + A^1 \bar{u}_A^1 - r^2 - A^2 \bar{u}_A^2 = 0 \quad 8-9$$

Siguiendo con el *Sólido 3*, este cumplirá el par prismático con el *Sólido 2*.

$$(A^1 \vec{h}^1)^T (r^1 + A^1 \bar{u}_B^1 - r^3 - A^3 \bar{u}_B^3) = 0 \quad 8-10$$

Y, por último, el *Sólido 2* cumplirá las restricciones de par de leva en el punto de contacto *C*, esta vez prescindiendo de la restricción de contacto perpendicular, ya que este ya viene impuesto indirectamente por la restricción de par prismático.

$$r^1 + A^1 \bar{u}_C^1 - r^2 - A^2 \bar{u}_C^2 = 0 \quad 8-11$$

Y para la rodadura sin deslizamiento:

$$v_C^2 * \vec{t}(y) = 0 \quad 8-12$$

9 REFERENCIAS

- Ü Sönmez, C. T. (2008). *A compliant bistable mechanism design incorporating elastica buckling beam theory and pseudo-rigid-body model*. J. Mech.
- A. Jafari, J. R. (2016). *Independent force and position control for cooperating manipulators handling an unknown object and interacting with an unknown environment*. J. Frank Inst.
- C. Liang, F. W. (2017). *Development of a high speed and precision wire clamp with both position and force regulations*. Computer Integration Manufacturing.
- C.Z Ma, J. D. (2014). *Overview of micro-force sensing methods*. Appl. Mech Mater.
- D. Bossert, U. L. (1996). *Experimental evaluation of a hybrid position and force surface following algorithm for unknown surfaces*. IEEE International Conference on Robotics and Automation.
- Erlbacher. (1995). *Method for applying constant force with nonlinear feedback control and constant force device using same*. US Patent, 5,448,146.
- Franco, J. E. (2017). *Dinámica de sistemas multicuerpo. Apuntes de la asignatura Cinemática y Dinámica de Máquinas*. Universidad de Sevilla.
- G. Wang, Q. X. (2016). *Position and force switching control of a piezo-driven microinjection system*. 35th Chinese Control Conference.
- G. Wang, Q. X. (2016). *Position and force switching control of a piezo-driven microinjection system*. Chinese Control Conference.
- H. Huang, D. S. (2011). *Force sensing and manipulation strategy in robot-assisted microinjection on ebrafish embryos*. IEEE/ASME, Trans. Mechatron .
- H.T Pham, D. W. (2011). *A constant force bistable mechanism for force regulation and overload protection*. Mech. Mach. Theory.
- Javier López-Martínez, D. G.-C. (2017). *Design of three new cam based constant force mechanisms*. Department of Engineering, University of Almeria, Department of Mechanical Engineering and Manufacturing, University of Seville, Department of civil engineering, University of Málaga.
- Jung, S. (2004). *Force tracking impedance control of robot manipulators under unknown environment*. IEEE Trans. Control Syst. Technol.
- Manousos, N. (2015). *Technical perspective. The where, how and why of constant force mechanisms in watchmaking*. Hodinkee.
- P. Alabuzbey, A. G. (1989). *Vibration Protecting and Measuring Systems with Quasi-Zero Stiffness*. Hemisphere Publishing Corp, New York.
- Shabana, A. A. (1998). *Dynamics of Multibody Systems*. Cambridge, University Press.
- Shabana, A. A. (2017). *Computational Continuum Mechanics*. Hardback.
- V Mallapragada, D. E. (2006). *A new method of force control for unknown environments*. RSI International Conference on Intelligent Robots and Systems.

- Wall, A. (1963). *Mechanical Springs*. New York: McGrall Hill.
- Weight, B. L. (2002). *Development and Design of Constant Force Mechanisms*. Department of Electromechanical Engineering, Faculty of Science and Technology, Brigham Young University.
- Weight, B. L. (2002). *Development and Design of Constant-Force Mechanisms*. Provo, Department of Electromechanical Engineering, Faculty of Science and Technology, Brigham Young University.
- Xu, P. (2014). *Design and constant force control of a parallel polishing machine*. IEEE International Conference on Information Science and Technology.
- Y. Huang, A. V. (2012). *Mems reliability review*. IEEE Trans. Device Mater Reliability.
- Y. Wei, Q. X. (2015). *An overview of micro-force sensing techniques*. Sens. Actuators.